

JOURNAL
INTERNATIONAL
D'ACOUSTIQUE

sous le patronage
du Groupement des Acousticiens
de Langue Française

INTERNATIONAL
JOURNAL
ON ACOUSTICS

sponsored by the Acoustics Group
of the Physical Society
(Great Britain)

INTERNATIONALE
AKUSTISCHE
ZEITSCHRIFT

unter Mitwirkung
des Verbandes Deutscher
Physikalischer Gesellschaften

ACUSTICA

edited by

Prof. Dr. M. GRÜTZMACHER

editor-in-chief

BRAUNSCHWEIG

publié par
Dr. F. CANAC
MARSEILLE

Dr. R. W. B. STEPHENS
LONDON

herausgegeben von
Prof. Dr. Dr. E. MEYER
GÖTTINGEN

assisté par

assisted by

unter Mitarbeit von

Prof. W. FURRER, Bern; Prof. Dr. A. GIACOMINI, Roma; Prof. Dr. J. HOLTSMARK, Oslo;
Prof. Dr. F. INGERSLEV, København; Prof. Dr. A. VAN ITTERBEEK, Leuven; Prof. Dr. C. W. KOSTEN, Delft

Managing editor: B. CRAMER, Darmstadt

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Vol. 10

1960

MODELLVERSUCHE ZUR ELEKTROMAGNETISCHEN RÜCKSTRAHLORTUNG (RADAR) MIT ULTRASCHALLWELLEN (SONAR)

von E. MEYER und P. SCHNUPF

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Bei Modellmessungen für Radar-Tarnung mit Hilfe von Ultraschall (SONAR) der Wellenlänge $\lambda = 2,5$ mm ergeben sich folgende Resultate:

Das Radarbild setzt sich im wesentlichen aus senkrecht von ebenen Flächen optisch reflektierten Signalen und aus Streusignalen von Kanten zusammen. Die optischen Reflexionen lagen mindestens 30 dB über den Streusignalen von Kanten. Die Streuwelle einer Kante ändert sich bei Belegen der angrenzenden Fläche mit Absorbern nur unwesentlich.

Genügt es, das Streusignal von Kanten um etwa 10 bis 20 dB zu senken, um es im Rauschen verschwinden zu lassen, so ist ein Auszacken der Kante über eine Strecke von mehreren Wellenlängen erfolgversprechend.

„Schallbilder“ von Modellhaus-Dörfern werden gegeben. — Messungen der Rückstreuung an Kugeln, Zylindern und Kreisscheiben verschiedener Querschnittsfläche werden zur Eichung der Anlage durchgeführt.

Summary

The following results were obtained from model experiments for radar camouflage with ultrasonic waves (SONAR) with 2.5 mm wavelength:

The radar screen picture is essentially composed of signals reflected optically from plane surfaces and of scatter signals from edges. The level of scatter signals from edges was at least 30 dB below that of optical reflections. The scattered wave from an edge is only slightly changed when the adjoining surface is covered with absorbers.

In order to lower the level of scatter signals from edges by about 10 to 20 dB down to the noise level it is sufficient to tooth the edges over a distance equal to several wavelengths.

Screen pictures of model villages are given. Measurements of the back scattering of spheres, cylinders and circular disks of various cross-sectional area were used for calibrating the apparatus.

Sommaire

Les résultats suivants furent obtenus par des mesures sur modèles réduits à l'aide d'ultrasons (SONAR) de longueur d'onde $\lambda = 2,5$ mm pour examiner les possibilités de camouflage contre Radar.

L'image du Radar consiste essentiellement en signaux réfléchis optiquement par rapport à la normale aux surfaces planes et en des signaux diffus émis par les arêtes. Les réflexions optiques ont un niveau plus élevé d'au moins 30 dB que les signaux diffus des arêtes. L'onde diffusée par une arête ne se modifie guère quand on garnit les surfaces voisines d'absorbants.

S'il suffit de réduire le signal diffus de 10 à 20 dB pour le faire disparaître dans le bruit de fond général, on peut découper les arêtes pour plusieurs longueurs d'ondes.

On donne des «images sonores» de modèles de villages. On a fait des mesures de réflexions sur des sphères, des cylindres, des disques circulaires de différentes sections pour étalonner l'arrangement.

1. Einleitung

Seit Einführung der Rückstrahl-Ortungsmethoden (RADAR) ist man nicht nur wissenschaftlich, sondern auch praktisch an einer Untersuchung der Streuung ebener elektromagnetischer Wellen an Objekten verschiedener Gestalt und elektrischer Eigenschaften interessiert. Wegen der Schwierigkei-

ten bei der theoretischen Behandlung des Problems ist man auf Modellmessungen im Laboratorium angewiesen. Solche Messungen sind jedoch insofern nicht einfach, als mit dem Modellmaßstab auch die Wellenlänge, die in der Praxis bei etwa 3 cm liegt, verkleinert werden muß. Elektromagnetische Mikrowellen lassen sich heute bis zu Wellenlängen von etwa 1 cm mit ausreichender Intensität erzeugen, um da-

mit Messungen ausführen zu können. Als Ultraschallwellen kann man leicht noch kürzere Wellen herstellen. Somit liegt es nahe, Modellmessungen mit Ultraschallwellen durchzuführen (SONAR) [1].

Die elektromagnetischen Wellen sind transversale, Ultraschallwellen jedoch longitudinale Wellen. Daher liefern Modellversuche mit Schallwellen immer dann falsche Resultate, wenn bei den nachzubildenden Streuproblemen Polarisierungseffekte eine wesentliche Rolle spielen. Die Erfahrung zeigt, daß der Unterschied im Verhalten von transversalen und longitudinalen Wellen verschwindet, wenn die Abmessungen der beugenden Objekte groß gegen die Wellenlänge sind. Dann kann man von akustischen Modellversuchen gute Ergebnisse erwarten. Ist dies nicht der Fall, etwa bei der Kantenstreuung, so kann man nur noch eine qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse des akustischen Modellversuchs mit dem Mittelwert über sämtliche Polarisationsrichtungen der elektromagnetischen Welle annehmen.

Im folgenden werden eine Apparatur für derartige Modellmessungen sowie damit durchgeführte Versuche beschrieben.

2. Beschreibung der Apparatur

2.1. Mechanischer und elektrischer Aufbau

Die üblichen Radargeräte [2] benutzen zur Festlegung des Ortes eines Streuobjektes ein Polarkoordinatensystem (r, φ) , dessen Zentrum der Standpunkt des Gerätes ist. Die drehbare Antenne sendet einen fächerförmigen Strahl aus. Die Breite der Hauptkeule des Strahles errechnet sich annähernd zu

$$\Theta \approx 70 \lambda / D,$$

wobei bedeuten:

- Θ die Breite des Strahles in Winkelgraden zwischen den Punkten, an denen die Energie auf die Hälfte der Maximalenergie abgefallen ist (Pegeldifferenz 3 dB),
- λ die Wellenlänge,
- D den Antennendurchmesser.

Für ein Flugzeugradargerät liegt D etwa zwischen 40 cm und 2,50 m. Die Wellenlänge ist $\lambda = 3$ cm. Daraus ergibt sich

$$5,3^\circ \geq \Theta \geq 0,8^\circ.$$

Die jeweilige Stellung der Antenne liefert die Winkelkoordinate φ mit einer Genauigkeit, die etwa durch $\pm \Theta/2$ gegeben ist. Bei der Konstruktion des Modellgerätes wird man also eine Strahlbreite von etwa 1° bis 3° zugrunde legen.

Die zweite Koordinate — die Radialentfernung r — wird bei den üblichen Radargeräten aus der Signallaufzeit für Hin- und Rückweg erhalten.

Dieses Verfahren ist jedoch keineswegs im Radarprinzip, sondern durch technische Gesichtspunkte und von der praktischen Anwendung her begründet. Man kann im Laborversuch auf dieses komplizierte Verfahren verzichten und ein besser geeignetes Koordinatensystem wählen.

Der Aufbau der Apparatur ging von der Wahl der elektroakustischen Wandler und der damit engverbundenen Wahl der Arbeitsfrequenz aus. Es wurden elektrostatische Strahler (Sell-Strahler) mit festem Dielektrikum verwendet, [3], [4]. Diese Strahler haben einen ziemlich gleichmäßigen Frequenzgang über einen breiten Frequenzbereich bis zu einer nicht stark ausgeprägten Resonanzfrequenz, oberhalb der ein Abfall der abgestrahlten Leistung eintritt. Die Resonanzfrequenz ist abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit der festen Strahlerelektrode sowie der Dicke und den mechanischen Eigenschaften der benutzten dielektrischen Folie. Mit einer polierten Elektrodenfläche und einer etwa 10μ dicken Folie lassen sich Resonanzfrequenzen von etwa 200 kHz erreichen.

Der rasche Anstieg der Luftabsorption mit der Frequenz ließ es als günstig erscheinen, eine Arbeitsfrequenz von $f = 135$ kHz nicht zu überschreiten. Die Luftabsorption beträgt bei dieser Frequenz bereits 6 dB/m. Man wird also versuchen müssen, mit möglichst kleinem Strahler-Objekt-Abstand auszukommen. Andererseits hatte die hohe Luftdämpfung den Vorteil, daß für die Messungen auf einen schalltoten Raum verzichtet werden konnte.

Der Frequenz $f = 135$ kHz entspricht eine Wellenlänge $\lambda = 0,25$ cm; damit ist der Modellmaßstab 1 : 12 bis 1 : 100 für den üblichen Radarwellenbereich zwischen 3 cm und 25 cm.

Die Strahlschärfe einer kreisrunden, ebenen, gleichförmig strahlenden Fläche errechnet man nach derselben Gleichung wie die der elektromagnetischen Antenne [5], [6] $\Theta \approx 70 \lambda / D$.

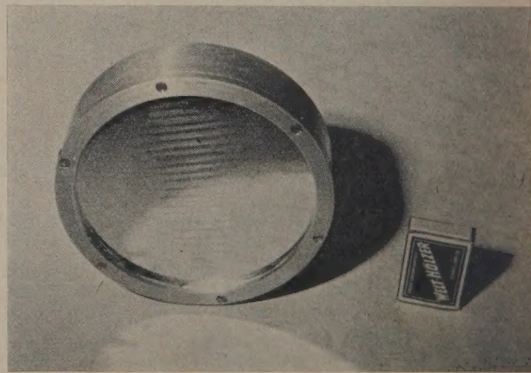
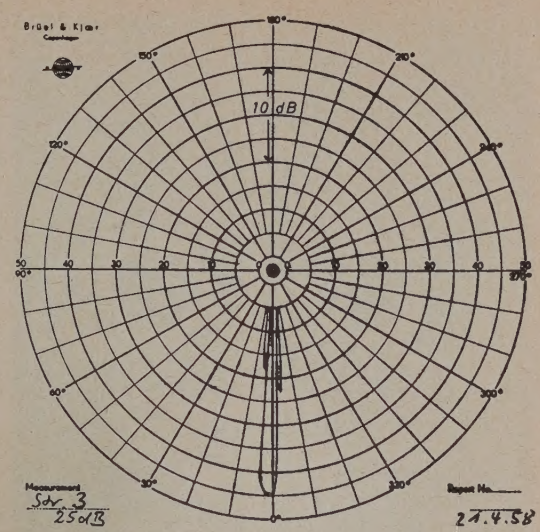
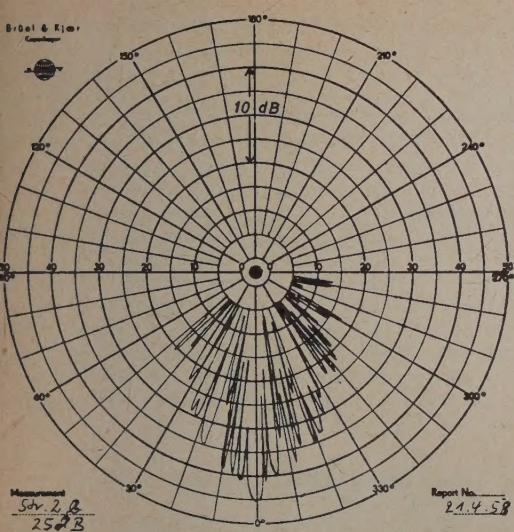


Bild 1. Sell-Strahler mit 12,5 cm Membrandurchmesser

Für die verwendeten Strahler mit einer strahlenden Fläche von $D = 12,5$ cm Durchmesser (Bild 1) erhält man $\Theta \approx 1,5^\circ$. Dies entspricht der Strahlschärfe eines üblichen Radargerätes. Die Richtcharakteristik eines derartigen Strahlers (Bild 2) zeigt eine große Anzahl von Seitenkeulen, deren Intensitäten nur wenige dB unter der der Hauptkeule liegen. Diese Seitenkeulen lassen sich in bekannter Weise unterdrücken, indem man die Membran nicht gleichförmig anregt, sondern die Anregungsspannung nach dem Rand zu abfallen



läßt. Hierzu wurde die hintere Strahlerelektrode in 10 gegeneinander isolierte Ringe aufgeteilt (Bild 3); über einen kapazitiven Spannungsteiler wurde die anregende Spannung so verteilt, daß die anregende Kraft nach einem \cos^2 -Gesetz nach den Seiten zu abfiel. Bild 4 zeigt die Richtcharakteristik des Strahlers mit unterdrückten Seitenkeulen.

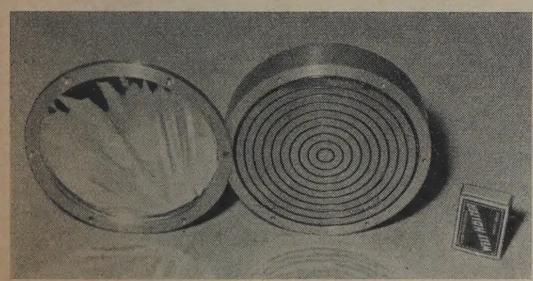


Bild 3. Sell-Strahler mit unterdrückten Seitenkeulen.

Als Empfänger wurde ein elektrostatischer Strahler gleicher Ausführung und Abmessungen verwendet, bei dem lediglich auf die Unterdrückung der Seitenkeulen verzichtet wurde. Er wurde neben dem Sender auf einer Leiste so befestigt, daß beide Wandler gemeinsam geschwenkt werden konnten.

Eine Blechplatte zwischen den Strahlern verhinderte das unmittelbare akustische Übersprechen. Das elektrische Übersprechen ließ sich dadurch unter die Grenze des Eigenrauschens senken, daß die anregende Spannung U für den Sender auf die halbe Meßfrequenz gelegt wurde. Dies ist möglich, weil die anregende Kraft $K \sim U^2$ ist.

Da wegen der hohen Luftabsorption der Objekt- abstand a möglichst klein sein soll, wurde im folgenden immer $a=160$ cm gewählt. Es könnte bedenklich erscheinen, daß dieser Objekt- abstand nicht wesentlich größer als $D^2/4\lambda$ (Fernfeldbedingung) ist. Die Eichung der Apparatur ergab jedoch, daß hierdurch kein merklicher Fehler verursacht wird.

In Analogie zum Radar würde es nun naheliegen, ebenfalls ein Polarkoordinatensystem als Abtastkoordinatensystem einzuführen. Wegen der mechanischen Schwierigkeiten, die ein solches System für die Strahlerführung mit sich gebracht hätte, wurde darauf verzichtet und ein Zylinderkoordinatensystem gewählt (Bild 5). Die Strahler können in der Horizontalen durch einen Motor geschwenkt (Winkel φ) und in der Vertikalen von Hand in ihrer Höhe verstellt werden (Höhe z). Zwei mit den Verstelltrieben mechanisch gekuppelte Potentiometer ermöglichen es, den Koordinaten φ und z proportionale Gleichspannungen zu er-

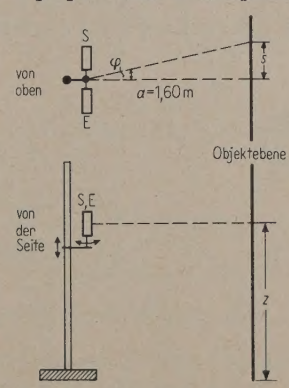


Bild 5. Skizze der Abtastapparatur.

zeugen, die zu einer mit der Strahlerbewegung synchronisierten Ablenkung des Kathodenstrahls der als Radarschirm benutzten Bildröhre verwendet werden können. Bild 6 zeigt die endgültige Ausführung der Abtasteinrichtung.

Der als Sender dienende Strahler wurde mit einer Spitzenwechselspannung von 225 V und von 67,5 kHz betrieben. Das Signal wurde mit 300 Hz Folgefrequenz impulsgetastet.

Bild 7 zeigt die Schaltung des Empfängers. Die Ausgangsspannung des als Empfänger dienenden elektro-

Für ebene Scheiben der Fläche A ist $\sigma = 4 \pi (A/\lambda)^2$ eine brauchbare Näherung für $A > 2 \lambda^2$. Für die Energiestromdichte der reflektierten Welle ist $W_s \sim \sigma$. Bei linearer Meßanordnung muß daher für den gemessenen Pegel P der Streuwelle gelten

$$P = 10 \log W_s = (10 \log \sigma + C) \text{ dB.}$$

Trägt man also den gemessenen Pegel P in dB gegen $10 \log \sigma$ auf, so muß man eine Gerade der Steigung 1 erhalten.

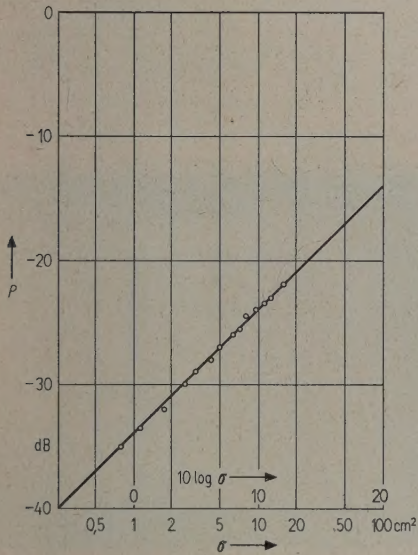


Bild 8. Schallstreuung an Kugeln.

Bild 8 gibt die Messungen an Stahlkugeln der Durchmesser $2R = 1,0$ cm bis $4,5$ cm. Diese waren im Abstand $a = 1,60$ m von der Apparatur an dünnen Seidenfäden aufgehängt. Die beste Gerade ist

$$P = [1,00(10 \log \sigma) - 34,0] \text{ dB} \quad (\sigma \text{ in cm}^2).$$

Für $-35 \text{ dB} < P < -20 \text{ dB}$ ist somit die Linearität im Rahmen der Meßgenauigkeit befriedigend. Die Meßpunkte liegen sehr gut auf dieser Geraden, der Korrelationskoeffizient ist $r = 0,98$.

Den Bereich zwischen $-20 \text{ dB} < P < 0 \text{ dB}$ bestreicht die Eichung mit Zylindern und ebenen, runden Scheiben. Als Zylinder dienten lange Messingzylinder mit dem Durchmesser $2R$, von denen nur ein kurzes Stück im Zentrum vom Strahl erfasst wird. Die wirksame Zylinderlänge l , die ungefähr gleich dem Leuchtfleckdurchmesser ist, ist unbekannt, aber konstant. Es gilt dann

$$\begin{aligned} P &= 10 \log \sigma + C = 10 \log \frac{2 \pi R}{\lambda} l^2 + C \\ &= 10 \log 2R + C'. \end{aligned}$$

Hier muß also P gegen $10 \log 2R$ (nicht gegen $20 \log R$ wie bei den Kugeln) aufgetragen werden.

Bild 9 gibt diese Eichkurve:

$$P = [1,00(10 \log 2R) - 13,1] \text{ dB} \quad (R \text{ in cm}).$$

Der Korrelationskoeffizient der Meßwerte ist $r = 0,96$.

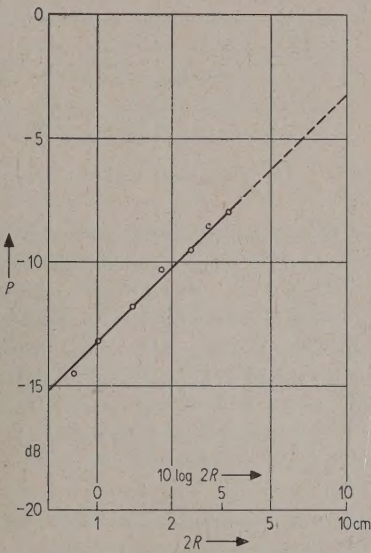


Bild 9. Schallstreuung an Zylindern.

Ein direkter Vergleich mit den aus den Messungen an Kugeln erhaltenen Werten ist nicht möglich, da σ nicht bekannt ist. Dagegen lassen sich die Messungen an Scheiben mit den Messungen an Kugeln vergleichen. Tabelle I gibt die Meßdaten für kreisrunde Scheiben der Durchmesser $2R = 0,5$ bis $3,5$ cm.

Tabelle I.
Streuquerschnittmessungen an kreisrunden Scheiben.

| $2r$ | A | P | σ | $10 \log \sigma$ |
|------|-----------------|------|-----------------|------------------|
| cm | cm ² | dB | cm ² | |
| 0,5 | 0,196 | -30 | 7,75 | 8,89 |
| 0,75 | 0,442 | -18 | 39,3 | 15,94 |
| 1,0 | 0,785 | -11 | 124 | 20,94 |
| 1,5 | 1,77 | -5,5 | 626 | 27,96 |
| 2,0 | 3,14 | -2,5 | 1980 | 32,97 |
| 2,5 | 4,91 | -1,5 | 4856 | 36,86 |
| 3,0 | 7,07 | -1,0 | 10053 | 40,02 |
| 3,5 | 9,62 | -0,5 | 18618 | 42,70 |

Bild 10 vergleicht die Messungen an Kugeln mit denen an Scheiben. Die ausgezogene Gerade ist die aus den Messungen an Kugeln gewonnene optimale Gerade $P = [1,00(10 \log \sigma) - 34,0] \text{ dB}$, die bereits in Bild 8 in größerem Maßstab dargestellt war. Sie ist bis $P = 0 \text{ dB}$ extrapoliert. Die Meßpunkte für kreisrunde Scheiben sind eingezeichnet. Bei dem Vergleich der Messungen an Scheiben mit dieser Geraden ist folgendes zu beachten:

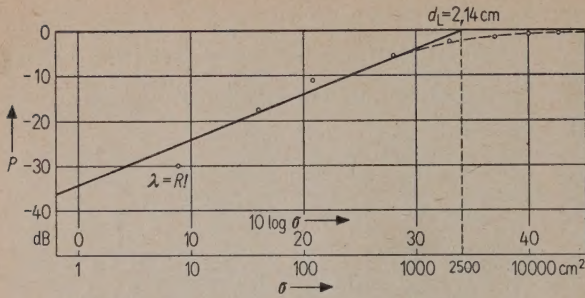


Bild 10. Streuquerschnitt kreisrunder Scheiben.

Bei dem Scheibendurchmesser $2R = 0,5 \text{ cm}$ ist λ noch nicht wesentlich kleiner als die Scheibendimensionen, die Formel $\sigma = 4\pi(A/\lambda)^2$ gilt nur genähert. Außerdem treten bei Scheiben zwei Fehlerquellen für die praktische Messung auf, welche die Messungen wesentlich unsicherer machen als diejenigen an Kugeln. Wegen $\sigma \sim A^2 \sim R^4$ wirken sich Ungenauigkeiten bei der Herstellung der Scheiben viel stärker aus als bei Kugeln ($\sigma \sim R^2$). Ferner muß bei Scheiben die Flächennormale sehr genau mit der Beobachtungsrichtung zusammenfallen, eine Schwierigkeit, die bei Kugeln aus Symmetriegründen entfällt. Man wird also die Messungen an Scheiben als gute Bestätigung der aus den Kugelmessungen erhaltenen Eichgeraden ansehen. Man bemerkt, daß für Scheibendurchmesser $2R > 1,5 \text{ cm}$ die Werte von der Eichgeraden abweichen und sich für wachsendes R asymptotisch dem Wert $P = 0 \text{ dB}$ (unendlich ausgedehnte Scheibe) nähern. Das liegt daran, daß die Linearabmessungen der Scheiben größer werden als der Leuchtfleckdurchmesser und diese deshalb nicht mehr voll ausgeleuchtet werden. Dieser Verlauf ist in Bild 10 durch eine gestrichelte Kurve dargestellt¹.

Die Tatsache, daß die für Kugeln erhaltene Eichgerade auch für Scheiben gilt, solange sie voll ausgeleuchtet werden, ermöglicht die Definition eines „äquivalenten Leuchtfleckdurchmessers“ d_L :

Die Eichgerade ergibt den Wert $P = 0 \text{ dB}$ für $\sigma_0 = 2500 \text{ cm}^2$. Wir deuten σ_0 als Streuquerschnitt

einer kreisrunden Scheibe mit dem Durchmesser d_L und der Fläche $A_0 = \pi d_L^2/4$:

$$\sigma_0 = 4\pi \left(\frac{A_0}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi^3 d_L^4}{4 \lambda^2}.$$

Wäre die gesamte Schallenergie der Strahlerhauptkeule über die Hauptkeule gleichmäßig verteilt, und würde sie am Rand der Hauptkeule scharf auf Null abfallen, so wäre dieser Durchmesser d_L genau der Durchmesser der gleichmäßig ausgeleuchteten Fläche. Es liegt also nahe, diesen Wert als „äquivalenten Leuchtfleckdurchmesser“ zu bezeichnen. Man erhält

$$d_L = 2,14 \text{ cm} \approx 8,6 \lambda.$$

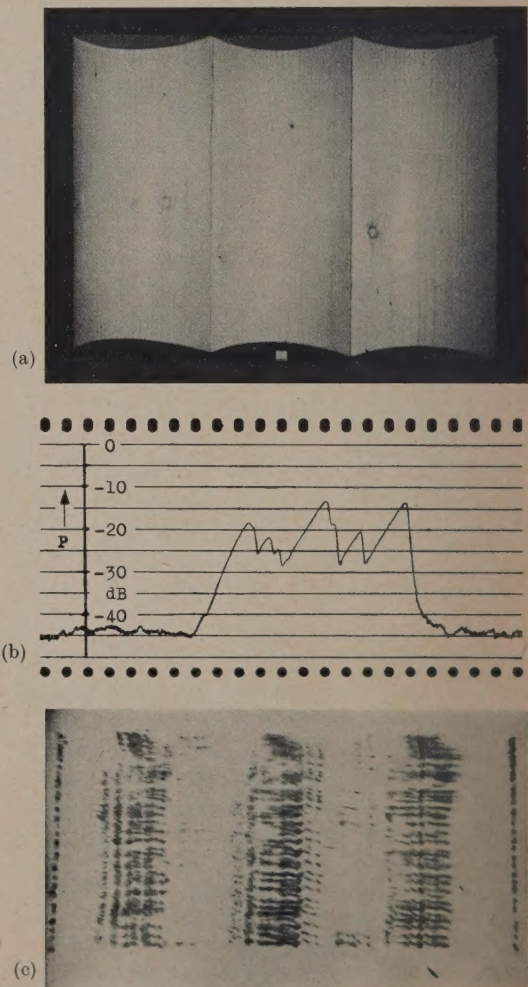


Bild 11. Abtastung eines Holzbrettes mit aufgesetzten Halbzylindern;

- (a) Photo des Bretts,
- (b) Pegelstreifen,
- (c) Schirmbild.

¹ Es mag auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen, daß Scheiben mit einem Durchmesser von $2R = 2 \text{ cm}$ nicht mehr befriedigend ausgeleuchtet werden, während Kugeln des Durchmessers $2R = 4,5 \text{ cm}$ noch keine merkliche Abweichung von dem für gleichmäßige Ausleuchtung geltenden Streuquerschnitt zeigen. Dieses Verhalten erklärt sich daraus, daß bei Kugeln annähernd die Reflexionsgesetze der geometrischen Optik gelten, sobald der Kugelradius groß gegen die Wellenlänge ist. Es reflektieren dann nur die Flächenelemente den Schall wieder zur Apparatur zurück, deren Flächennormale etwa mit der Strahleinfallsrichtung zusammenfällt, d. h. eine kleine Kreisscheibe um das Zentrum der Kugel. Die Randstreuung ist dagegen vernachlässigbar klein.

Die aus den Messungen an Scheiben erhaltenen Werte zeigen außerdem, daß man bis zu einem Objektdurchmesser $d_L \approx 1,5 \text{ cm} = 6\lambda \approx 2 d_L/3$ mit hinreichend konphasen Ausleuchtung rechnen kann. Der Leuchtfleckdurchmesser d_L gibt auch die Größenordnung des räumlichen Auflösungsvermögens bei der punkweisen Abtastung von Objekten.

Aus der Streuung der Meßpunkte um die Eichgeraden konnte auf übliche Weise der Meßfehler der Anlage abgeschätzt werden. Bei Berücksichtigung der Ungenauigkeiten der Nullpunktsbestimmung und der Ablesung der Werte vom Pegelstreifen ergab sich ein Fehler $\Delta P = \pm 2 \text{ dB}$, das ist ein Fehler der Rückstreuamplitude von etwa 25%.

Um das Arbeiten der Abtastapparatur und der Anzeige auf Pegelschreiber und Schirm des Blauschreibers zu prüfen, wurden einfache Gebilde abgetastet. Bild 11 a zeigt ein Brett der Größe $71,5 \text{ cm} \times 55 \text{ cm}$, auf das drei kreisrunde Wölbungen aufgesetzt sind. Sämtliche Abmessungen sind groß gegen die Wellenlänge. Der Winkel, unter dem die Zylindersegmente aufeinanderstoßen, beträgt 90° . Dieses Brett wurde abgetastet. Bild 11 b ist die Anzeige des Pegelschreibers während eines horizontalen Durchgangs. Zwischen den Hauptmaxima liegen Nebenmaxima. Diese entstehen durch Doppelreflexion an den senkrecht auseinanderstoßenden Zylinderflächen. Es ist dies ein zweidimensionales Analogon zum bekannten dreidimensionalen Winkelspiegel. Bild 11 c zeigt das Schirmbild, das aus 33 Einzeldurchgängen auf dem Blauschreiberbild entstand. Zwischen je zwei Durchgängen wurden die Strahler um $0,75 \text{ cm}$ gesenkt. Die horizontale Linienstruktur ist noch deutlich sichtbar².

3. Modellversuche zur Radar-„Tarnung“

3.1. Klassifizierung der Radarziele

Um Anhaltspunkte für die Versuche zu erhalten, sei eine grobe Klassifizierung der praktisch vorkommenden Radarziele vorgenommen. Eine zweckmäßige Einteilung ist folgende:

a) Senkrechte optische Reflexion an einer ebenen Fläche. Ein Beispiel ist etwa ein Hausdach, das zu-

fällig senkrecht zur Beobachtungsrichtung steht. Auch gekrümmte Flächen, deren Krümmungsradius sehr groß gegenüber der Wellenlänge ist, sind hier einzuordnen, also etwa die Oberfläche eines Gasometers. Prinzipiell ist eine Tarnung derartiger Objekte durch Belegen mit einem Absorber möglich. Hierher gehört auch der Winkelspiegel, der aus drei senkrecht zueinanderstehenden ebenen Flächen besteht. Er bringt eine zusätzliche Schwierigkeit insofern, als er jede Einfallsrichtung in sich zurückspiegelt.

b) Streureflexionen von größeren Flächen, die statistische Unregelmäßigkeiten aufweisen, deren Linearabmessungen vergleichbar mit der Wellenlänge sind. Beispiele sind Wiesen oder gewellte Wasserflächen. Diese Objekte verteilen die Rückstreuenergie mehr oder weniger gleichmäßig über den ganzen Halbraum. Das Rückstreusignal ist deshalb wesentlich schwächer als das der optisch reflektierenden Ziele, aber oft noch gut zu erkennen. Eine Tarnung dürfte, falls gewünscht, kaum möglich sein.

c) Streureflexionen an Kanten. Unter Kanten sollen alle Linien verstanden sein, an denen sich die Objektdaten irgendwie ändern, also etwa ein Straßenrand, an dem die glatte Beton- oder Asphaltfläche an eine Grasfläche grenzt, ein Flußufer, ein Hausgiebel — eine Trennungslinie zwischen der fast ebenen Dachfläche und der Luft — oder eine Dachkante, längs der zwei aus gleichem Material bestehende Flächen einen Winkel gegeneinander einschließen. All diesen Objekten ist gemeinsam, daß sie eine zylindrische Streuwelle aussenden. Der Rückstreupegel ist viel kleiner als der von optisch reflektierenden Flächen. Liegt er aber noch erkennbar über dem Rauschpegel, so bilden diese Ziele — Straßen, Flüsse, Eisenbahnlinien — die wesentlichen Referenzmarken beim Vergleich des Radarbildes mit einer Landkarte; die „Konturen“ werden sichtbar. Die Streuung an Kanten ist deshalb ein wichtiger Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen.

3.2. Eindimensionale Abtastung von Schirmen und „Tarnversuche“ durch Resonanzabsorber geringer Schichtdicke

Untersucht wurden Kanten von großen, ebenen, schallharten Schirmen. Dies entspricht für elektromagnetische Wellen der unendlichen, leitenden Halbebene. Dabei wurde ein konkretes Radarstreuproblem eindimensional nachgebildet; eine ebene, optisch reflektierende Fläche — etwa eine Betonstraße —, die von einem vollständig absorbierenden Medium oder einer Anordnung mit wegweisender Reflexion umgeben ist. Als Modell dient ein Blech

² Die zur Abtastung aufzuwendende Zeit erlaubt keine nennenswerte Vergrößerung der Zeilenzahl. Die von den Potentiometern gelieferten Ableitungen werden durch Gleichspannungsverstärker verstärkt, die zwar stabilisiert sind, aber durch die unvermeidlichen Netzschwankungen über längere Zeiträume doch beträchtliche Nullpunktsgänge aufweisen. Um 30 Linien aufzuzeichnen, braucht man etwa 20 Minuten, dehnt man die Meßzeit über eine halbe Stunde aus, so ergibt die unvermeidliche Schwankung der Gleichspannungsverstärkung starke Bildverzerrungen. Die angewandte Schrittweite bildet einen günstigen Kompromiß.

der Breite $l = 35$ cm, das senkrecht in der Luft steht (siehe Bild 12). Die Senkrechte auf der Verbindungslinie von der Schwenkachse der Strahler zur vorderen Blechkante K_1 schließt mit dem Schirm einen Neigungswinkel δ ein.

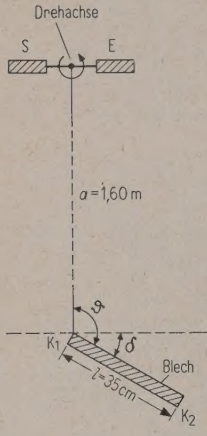


Bild 12. Anordnung zur Messung der Kantenstreuung.

Die Strahler wurden durchgeschwenkt, das Streusignal auf dem Pegelschreiber aufgenommen. Bild 13 zeigt ein Beispiel für eine solche Aufnahme. Die horizontale Koordinate ist der Schwenkung der Strahler proportional. Man erkennt deutlich die vordere und die hintere Schirmkante, das Signal der hinteren Kante K_2 ist schwächer, teils wegen des größeren Abstandes, teils weil der Beobachtungswinkel

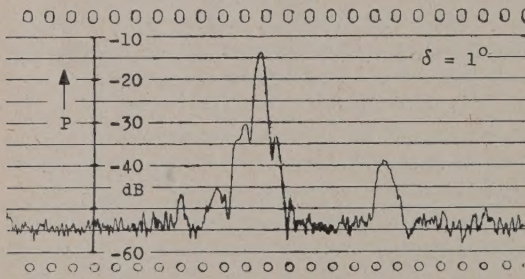


Bild 13. Beispiel der Schallabtastung eines schallharten Schirmes.

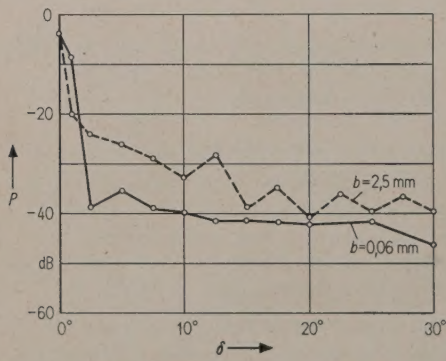


Bild 14. Winkelabhängigkeit der Kantenstreuung.

für diese Kante größer ist. Ausgewertet wurde nur das Signal der vorderen Kante K_1 .

Tabelle II bzw. Bild 14 geben den Maximalpegel P der Kante K_1 für Schirme der Dicke $b = 2,5$ mm und $b = 0,06$ mm (Rasierklingschneide) in Abhängigkeit von dem Neigungswinkel δ . Man erhält für $\delta = 0^\circ$ den Wert $P = -3$ dB, d. h. die halbe Schallenergie der optischen Reflexion von der ebenen, schallharten Fläche. Dies erklärt sich einfach daraus, daß der halbe Leuchtfleck von dem Schirm optisch reflektiert wird, und die Kantenstreuungseffekte dagegen zu vernachlässigen sind.

Tabelle II.
Schallstreuung an der „blanken“ Kante.

| δ | P | |
|--------------|--------------|---------------|
| | $b = 2,5$ mm | $b = 0,06$ mm |
| | dB | dB |
| 0° | - 3 | - 3 |
| $1,0^\circ$ | - 8,5 | - 20 |
| $2,5^\circ$ | - 38,5 | - 24 |
| $5,0^\circ$ | - 35,5 | - 26 |
| $7,5^\circ$ | - 39 | - 29 |
| $10,0^\circ$ | - 40 | - 33 |
| $12,5^\circ$ | - 41,5 | - 28,5 |
| $15,0^\circ$ | - 41,5 | - 39 |
| $17,5^\circ$ | - 42 | - 35 |
| $20,0^\circ$ | - 42,5 | - 41 |
| $22,5^\circ$ | | - 36,5 |
| $25,0^\circ$ | - 42 | - 40 |
| $27,5^\circ$ | | - 37 |
| $30,0^\circ$ | - 46,5 | - 40 |

Es entsteht jetzt die Frage, ob die Streuung des Schalles an der Kante durch eine Absorptionsfolie auf dem Schirm vermindert werden kann. Hierzu wurde die Mikroporplatte L 1110 (Holzwerke Dorlar) verwendet. Sie hat bei der Arbeitsfrequenz $f = 135$ kHz als Strömungswiderstand etwa den Wellenwiderstand von Luft. Bringt man sie in einem Abstand von $\lambda/4 \approx 0,6$ mm vor einer schallharten Fläche an, erhält man einen Resonanzabsorber, der bei senkrechter Inzidenz eine Reflexionsdämpfung von 25 dB (Energieabsorption von 99,7%) erzeugt.

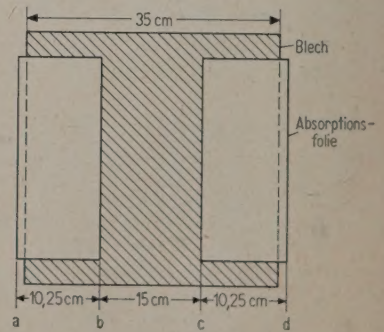


Bild 15. Belegung des Schirmes mit einer Absorptionsfolie.

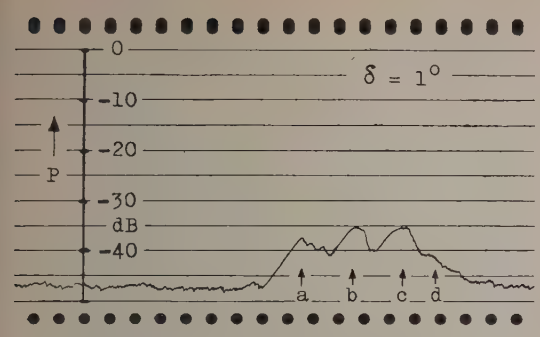


Bild 16. Beispiel der Schallabastung des Schirmes mit absorberbelegten Randpartien.

Die Einhaltung des Abstandes $\lambda/4$ ist übrigens nicht sehr kritisch, da die Folie selbst eine Dicke von etwa 0,5 mm hat.

Die Randpartien des Schirms (Dicke 2,5 mm) wurden mit 10,25 cm breiten Streifen aus Mikroporfolie belegt und der Schirm genau wie vorher abgetastet.

Bild 15 zeigt die Abmessung des Absorptionsbelages, Bild 16 als Beispiel die Pegelschreiberanzeige bei der Abtastung des um $\delta = 1^\circ$ geneigten Schirms. Jetzt geben nicht nur die vordere und die hintere Kante des Schirms (a und b) ein Streusignal, sondern, wie zu erwarten, auch die Kanten b und c, die Trennlinien zwischen den absorbierenden und den nicht absorbierenden Teilen des Schirmes. Wesentlich ist die Abhängigkeit des Streufeldes der vorderen absorbierenden Kante a (die auch bei vollständiger Absorberbelegung der Fläche vorhanden

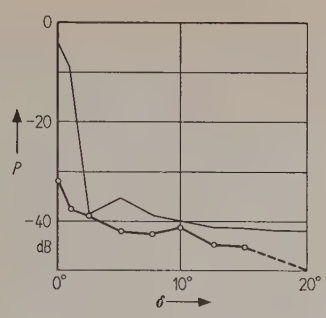


Bild 17. Schallstreuung an der absorberbelegten Kante (—); (---) blanke Kante).

scharfe Licht-Schatten-Grenze hinter der Objektebene sowie die scharfe Grenze der reflektierten Welle vor dem Schirm zu verwischen. Ist der Schirm absorbierend, so verschwindet zwar die reflektierte Welle, nicht aber die Schattengrenze hinter der Objektebene. Es ist also noch immer eine physikalische Ursache für das Entstehen einer Streuwelle vorhanden, und es ist nicht weiter erstaunlich, daß diese Streuwelle auch vor der Objektebene nachweisbar ist.

3.3. „Tarnung“ von Kanten durch ihre Auflösung in Zacken

Es wurde versucht, die Kantenreflexion auf folgende Weise zu ändern:

Am Rand des Schirms wurden Schlitzte der Tiefe $t \gg \lambda$ eingeschnitten, deren Breite etwas größer als die Wellenlänge war (siehe Bild 18), um einen stetigen Übergang von der Luft zum Blech anzunähern; oder anders ausgedrückt, durch das Einschnneiden des Schirmrandes über eine gewisse Strecke hin entsteht ein Beugungsgitter, und ein Teil der einfallenden Schallenergie wird seitwärts weggebogen. Diese

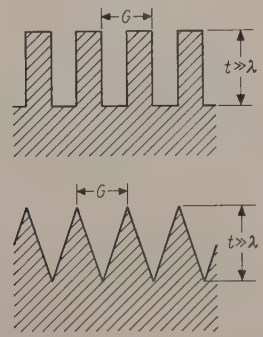


Bild 18. Skizze zur Auflösung der Schirmkanten.

ist) vom Neigungswinkel δ . Tabelle III gibt die Meßergebnisse; Bild 17 zeigt das Ergebnis im Vergleich mit den Messungen an der blanken, nicht absorbierenden Kante (Tabelle II, Bild 14).

Dieser Vergleich liefert ein wichtiges Ergebnis. Zwar wird die geometrische Reflexion durch die Absorptionsfolie erheblich verringert, aber die Intensität des Streufeldes wird kaum beeinflußt.

Eine exakte oder gar quantitative Erklärung dieses zuerst überraschenden Effektes dürfte schwierig sein. Er wird plausibel, wenn man sich erinnert, daß die physikalische Funktion des Streufeldes ist, die

zweite Beschreibung des Vorgangs zeigt den Nachteil, den man für die erwünschte Senkung des Rückstreupegels in Kauf nehmen muß: man erhält jetzt nicht nur Streuenergie von jenen Teilen der Kante, die annähernd senkrecht zur Beobachtungsrichtung

Tabelle III.

Schallstreuung an der „schwarzen“ Kante.

| δ | P für Kante a | |
|----------|-----------------|------|
| | dB | |
| 0° | — | 32 |
| 1,0° | — | 37,5 |
| 2,5° | — | 39 |
| 5,0° | — | 42 |
| 7,5° | — | 42,5 |
| 10,0° | — | 41,5 |
| 12,5° | — | 45 |
| 15,0° | — | 45,5 |

Tabelle IV.
Schallstreuung periodisch ausgeschnittener Kanten.

| δ | P | | | |
|--------------|-----------------------------------|------------------|----------------------------------|------------------|
| | $G = 3 \lambda = 0,75 \text{ cm}$ | | $G = 6 \lambda = 1,5 \text{ cm}$ | |
| | spitz dB | rechteckig dB | spitz dB | rechteckig dB |
| 0° | -20 | -17 | -16 | -18,5 |
| $1,0^\circ$ | -37,5 | -24 | -28,5 | -24,5 |
| $2,5^\circ$ | -41,5 | -32 | -35,7 | -30 |
| $5,0^\circ$ | -42 | -45 | -34 | -38 |
| $7,5^\circ$ | | -45 | -44,5 | -42 |
| $10,0^\circ$ | | | -55 | -43 |
| $12,5^\circ$ | | | | -43,5 |
| $15,0^\circ$ | | | | -48 |
| $17,5^\circ$ | | | | -49 |

verlaufen, sondern noch von beliebig schräg verlaufenden anderen Kantenteilen.

Es wurden spitz- und rechtwinklig eingeschnittene Schirme der Gitterkonstanten $G=3\lambda$ und $G=6\lambda$ untersucht. Bei den rechtwinklig geschnittenen Schirmkanten betragen Schlitz- und Stegbreite je $G/2$. Die Schnitttiefe betrug immer $t=1,5 \text{ cm}=6\lambda$. Tabelle IV gibt den Rückstreupegel P wiederum in Abhängigkeit vom Neigungswinkel. Bild 19 zeigt den Streupegel in Abhängigkeit vom Neigungswinkel für $G=3\lambda$, Bild 20 den für $G=6\lambda$, jeweils im Vergleich zur Streuung der glatten, nicht absorbierenden Kante (Bild 14).

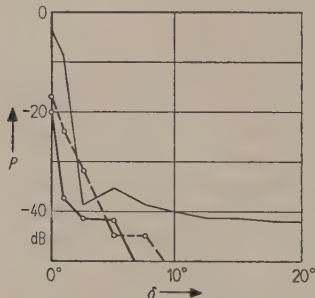


Bild 19. Schallstreuung an der gezackten Kante, $G=3\lambda$;
— spitz ausgeschnitten, --- rechteckig
ausgeschnitten, — glatte Kante.

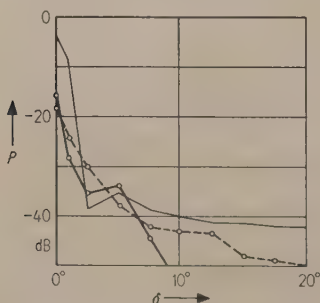


Bild 20. Schallstreuung an der gezackten Kante, $G=6\lambda$;
— spitz ausgeschnitten, --- rechteckig
ausgeschnitten, — glatte Kante.

Man sieht, daß die geometrische Reflexion um etwa 15 dB, die Streufelder durchschnittlich um etwa 10 dB gesenkt werden. Spitzes Ausschneiden ist etwas günstiger als rechteckiges. Anschaulich erklärt sich dies dadurch, daß dann der Übergang von Luft zum Blech gleichmäßiger ist.

Bei periodischem Auszacken entstehen bei bestimmten Ausstrahlrichtungen scharfe Beugungsmaxima hoher Intensität. Um diese Maxima etwas zu verwischen, wurden entsprechende Messungen mit einem statistisch gezackten Schirmrand vorgenommen. Es wurden wiederum $1,5 \text{ cm}=6\lambda$ tiefe und spitze Zacken ausgeschnitten, deren Breite zwischen 2 mm und 20 mm variiert und mit Hilfe einer Zufallszahlen-Tabelle festgelegt wurde. Die mittlere Zackenbreite ist also $G=11 \text{ mm}=4,4\lambda$.

Mit diesem Schirm wurden nun die gleichen Messungen wie vorher vorgenommen. Auch hier werden jeweils nur wenige Zacken ausgeleuchtet. Deshalb streuen im vorliegenden Fall die einzelnen Messungen stark; für sie kann nicht von einer „statistisch gezackten“ Kante gesprochen werden, nur für die Mittelwerte an verschiedenen Kantenstellen gilt dies.

Tabelle V.
Schallstreuung an der statistisch gezackten Kurve.

| δ | P | ΔP |
|--------------|-------|------------|
| | dB | dB |
| 0° | -21,2 | $\pm 1,3$ |
| $1,0^\circ$ | -41,5 | $\pm 1,5$ |
| $1,5^\circ$ | -47,3 | $\pm 2,8$ |
| $1,75^\circ$ | -49,6 | $\pm 3,3$ |
| $2,5^\circ$ | -41,5 | $\pm 1,4$ |
| $3,5^\circ$ | -44,4 | $\pm 1,9$ |
| $5,0^\circ$ | -50,9 | $\pm 1,7$ |

Tabelle V stellt die Mittelwerte des Rückstreupegels P aus 10 Messungen an verschiedenen Stellen der Kante in Abhängigkeit vom Neigungswinkel sowie die mittlere Abweichung ΔP zusammen. Bild 21 zeigt diese Winkelabhängigkeit des Rückstreupegels im Vergleich zur glatten Kante. Die sta-

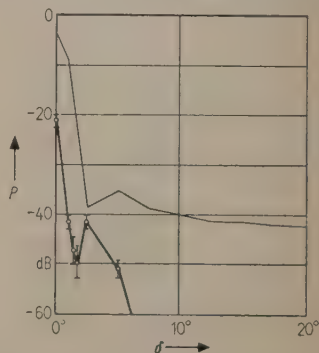


Bild 21. Schallstreuung an der statistisch gezackten Kante (—); (--- glatte Kante).

tistisch gezackte Kante liefert eine noch etwas stärkere Senkung des Pegels als die regelmäßig ausgezackte.

Die „Tarnmethode“ der ausgezackten Kante bringt den Nachteil mit sich, daß ein solches Kantenstück in alle Richtungen streut und — wenn diese Streuung stark genug ist, um nicht im Rauschen zu verschwinden — jetzt unter Umständen aus jeder Richtung zu sehen ist. Folgender Versuch soll diesen Effekt illustrieren. Es wurden ein Schirm mit glatten Rändern und ein Schirm mit statistisch gezacktem oberem Rand in einem Neigungswinkel $\delta = 20^\circ$ zur Abtastapparatur aufgestellt. Die Bilder 22 a und c zeigen diese Schirme, von der Abtastapparatur aus ge-

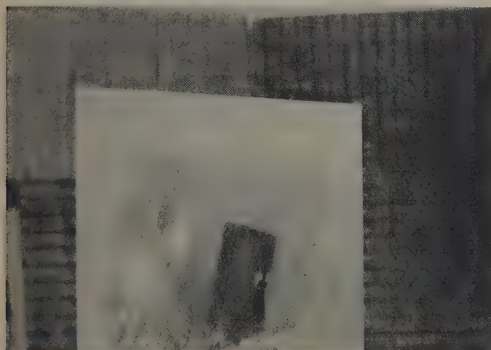


Bild 22 a. Schirm mit glattem Rand.

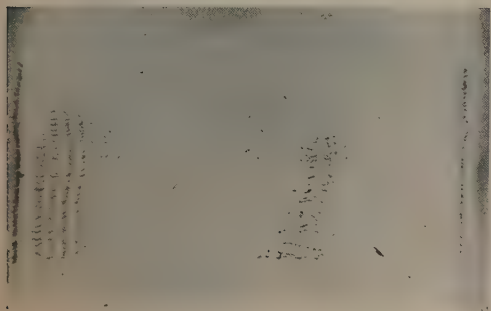


Bild 22 b. Abtastbild von Bild 22 a.

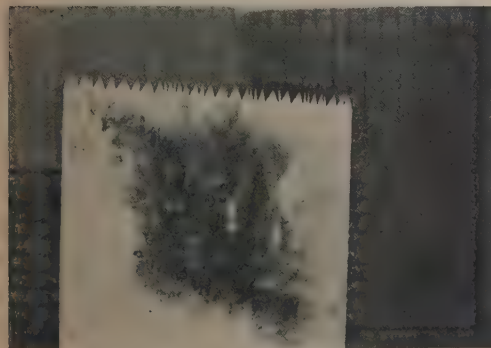


Bild 22 c. Schirm mit gezacktem Rand.

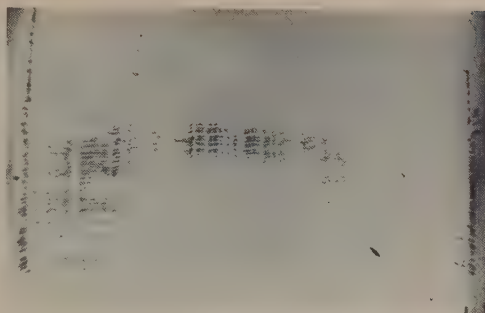


Bild 22 d. Abtastbild von Bild 22 c.

sehen. Dann wurden diese Schirme abgetastet und das „Schallbild“ auf der Blauschreiberröhre aufgezeichnet (Bilder 22 b und d). Was hier interessiert, ist der obere Schirmrand. Der statistisch ausgezackte Rand ist in Bild 22 d deutlich zu sehen. Der glatte obere Rand des Schirms von Bild 22 a ist auf dem zugehörigen Abtastbild 22 b unsichtbar; dies, obwohl die Verstärkung gegenüber Bild 22 d noch um 10 dB vergrößert wurde. Diese Verstärkungsänderung hat zur Folge, daß der hintere senkrechte Schirmrand, der in Bild 22 d kaum zu erkennen ist, in Bild 22 b gut durchgezeichnet ist.

3.4. Versuche an Hausmodellen

Um zu veranschaulichen, wie optische Reflexionen und Streuungen an Kanten beim Entstehen eines Radarbildes zusammenwirken, wurden Hausmodelle auf einer Blechplatte befestigt und abgetastet. Die Platte stand ungefähr in der Objektebene um 20° bis 40° gegen die Senkrechte geneigt. Es handelt sich um Spielzeugmodelle im Maßstab 1:90, bei denen Details wie Fensterläden, Dachziegel, Zäune und dergleichen sorgfältig herausgearbeitet sind. Im Maßstab 1:90 entspricht die verwendete Modellwellenlänge von 2,5 mm einer Radarwellenlänge von 22,5 cm. Da die Grundplatte nie senkrecht zum Strahl steht, reflektiert sie die auffallende Schallenergie fort, und man erhält kein Streusignal von der Platte, sondern nur von den darauf befestigten Häusern.

Bild 23 zeigt übereinander die Anordnung der Modelle und das nach der Abtastung erhaltene Schirmbild. Modellhaus und zugehöriger Schirmbildfleck sind jeweils mit den gleichen Buchstaben bezeichnet. Bei Betrachtung dieses Bildes fällt sofort auf, daß kein Zusammenhang zwischen der Größe des Flecks auf dem Schirmbild und der Größe des abgetasteten Hauses besteht. Die Fleckgröße ist vielmehr nur von der zufälligen Stellung des Hauses, seiner Flächen und Kanten zur Abtastapparatur abhängig.

In Bild 23 gibt das mit a bezeichnete Haus das bei weitem stärkste Bild. Bei ihm fällt die Normale

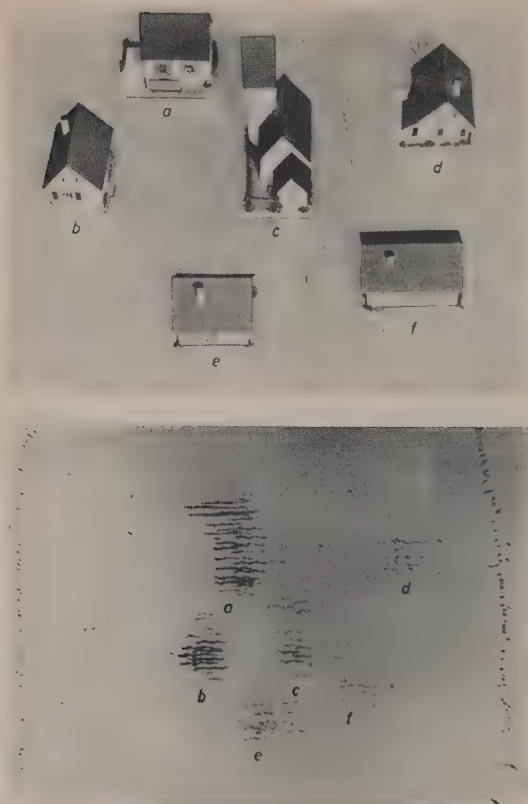


Bild 23. Lichtbild und SONAR-Bild von Modellhäusern.

der Dachfläche zufällig mit der Strahlrichtung zusammen, Balkon, Fenster, Zaun und Winkelreflexion am Fuß des Hauses geben genügend Streuschall, um über die ganze Höhe des Hauses die Helltastung des Blauschreibers voll auszusteuern. Die Häuser b, c, d, e geben nahezu gleiche Streuenergie, die Unterschiede in der Fleckstärke werden durch die geringe Dynamik der Blauschreiberröhre übertrieben. Die Signale sind im wesentlichen Streuschall von Dachkanten, Fensterläden u. ä., sowie von rechtwinklig aneinanderstoßenden Flächen (Haus b). Das stärkste Signal für die Abbildung der Kirche erhält man vom Zaun des Vorgartens und der starken Häufung von Kanten zwischen Hauptgebäude und Anbau. Das auffallende schwache Streusignal von Haus f erklärt sich wohl daraus, daß wegen der ungünstigen Winklereinstellung der Dachkanten zur Strahlrichtung nur die obere Dachkante ein wahrnehmbares Streusignal gibt. Die obere Dachkante des Modells hat nämlich eine stärkere Feinstruktur als die untere, wie man bei genauem Hinsehen erkennt. Ähnlich dem früher bei ausgeschnittenen Kanten beobachteten Streumechanismus liefert sie deshalb Signale über einen größeren Winkelbereich als die untere Kante. Bei dem Haus e lag dagegen als

Folge des steileren Dachs die Normale der Dachfläche noch nahe genug bei der Strahlrichtung, so daß auch die untere Dachkante ein Streusignal genügender Stärke lieferte.

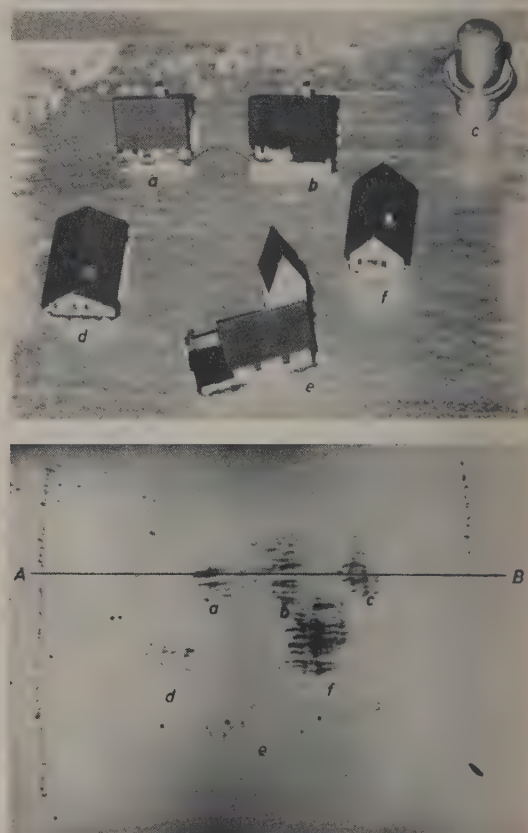


Bild 24. Lichtbild und SONAR-Bild von Modellhäusern (ebene Flächen total reflektierend) sowie Pegelschreiberanzeige längs der Linie A B.

Bei hinreichend großer Verstärkung gelingt es immer, von jedem der Häuser ein Streusignal aufzuzeichnen. Die Stärke der einzelnen Streusignale ist sehr unterschiedlich. Das Echo ist selbstverständlich stark, wenn optische Reflexion vorliegt. Ist das nicht der Fall, so ist die jeweilige Stärke des Streusignals

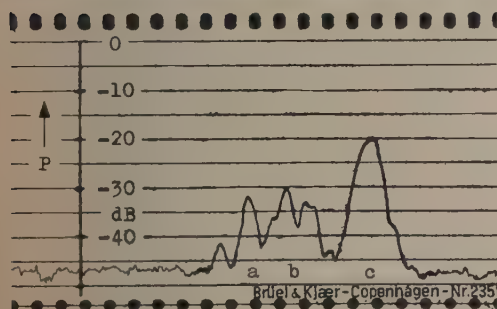
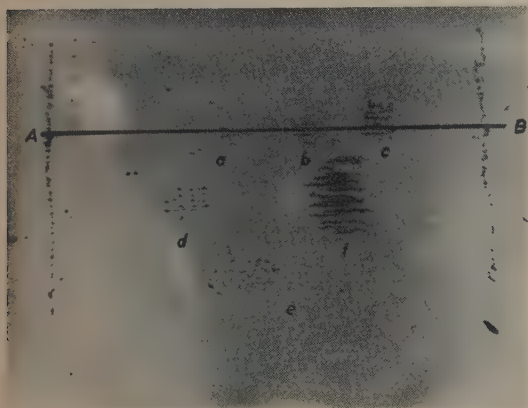


Bild 25. Lichtbild und SONAR-Bild von Modellhäusern (ebene Flächen total absorbierend) sowie Pegelschreiberanzeige längs der Linie A B.

kaum vorausszusagen, weil die Winkelabhängigkeit der Kantenstreuung sehr kompliziert ist.

Belegt man nun die ebenen Flächen mit Absorbieren, so gelingt es lediglich, die optische Reflexion von diesen Flächen zu vermindern. Das Schirmbild des Radargeräts wird dadurch kaum beeinflusst. Dies sollen die Bilder 24 und 25 zeigen. Bild 24 entspricht Bild 23, es ist die Abtastung einiger Häuser und eines Gasometers. Der Pegelschreiberstreifen zeigt quantitativ den Pegel längs der auf dem Schirmbild eingezeichneten Linie A B. Für Bild 25 wurden jetzt die wesentlichen Dachflächen mit Absorptionsfolien bedeckt. Die Verstärkung wurde um 10 dB vergrößert. Die Änderung des Schirmbildes gegenüber dem vorigen ist gering. Die Senkung der optischen Reflexionen längs der Linie A B zeigt quantitativ wieder der Pegelschreiberstreifen.

Tarnungsversuche bei kompliziert gestellten Objekten durch Belegen von ebenen Flächen mit Absorbieren dürften also nur in den seltensten Fällen erfolgreich sein.

(Eingegangen am 25. Mai 1959.)

Schrifttum

- [1] MEYER, E., KUTTRUFF, H. und SEVERIN, H., Experimentelle Bestimmung des Radar-Streuquerschnitts zylindrischer Metallkörper. *Z. angew. Phys.* **11** [1959], 1.
- [2] RIDENOUR, L. N., *Radar system engineering* (MIT Radiation Laboratory Series, Vol. 1), S. 271 ff., McGraw-Hill Book Co., New York 1947.
- [3] SELL, H., Eine neue Methode zur Umwandlung mechanischer Schwingungen in elektrische und umgekehrt. *Z. tech. Phys.* **18** [1937], 3.
- [4] KUHL, W., SCHODDER, G. R. und SCHRÖDER, F.-K., Condensor transmitters and microphones with solid dielectrics for airborne ultrasonics. *Acustica* **4** [1954], 519.
- [5] REICHARDT, W., *Grundlagen der Elektroakustik*, S. 258 ff. Akad. Verlagsges., Leipzig 1954.
- [6] STENZEL, H. und BROSE, O., *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen*. Springer-Verlag, Berlin 1958.

ÉCOULEMENTS LIÉS À UNE ONDE SUPERSONIQUE

VÉRIFICATION (DANS UN TUBE À CHOC)

DES PRÉVISIONS THÉORIQUES

par F. CANAC et M. MERLE

Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes, Marseille

Sommaire

Après un bref rappel de la théorie d'un tube à choc, on expose l'étude expérimentale faite en particulier avec l'aide d'une caméra électronique. Elle montre clairement la succession dans le temps des phénomènes qui ont pris naissance dans le tube. Le rôle de la pression génératrice et de la longueur des différents éléments du tube est mis en relief.

Les auteurs font une critique préliminaire des données mathématiques en comparaison des expériences. Enfin les avantages de l'emploi d'un tube à choc sont énumérés.

Zusammenfassung

Nach einer kurzen Übersicht über die Theorie des Stoßwellenrohres wird über experimentelle Untersuchungen berichtet, die insbesondere mit einer elektronischen Kamera vorgenommen wurden. Diese zeigen klar den zeitlichen Ablauf der im Rohr auftretenden Phänomene. Die Rolle des Eingangsdruckes und der Einfluß der Länge der verschiedenen Rohrelemente werden hervorgehoben.

Nach einem kritischen Vergleich der mathematischen Behandlung mit dem Experiment werden schließlich die Vorteile bei Verwendung eines Stoßwellenrohres aufgezählt.

Summary

After a brief review of shock tube theory an experimental study, using an electronic camera, is described. This shows clearly the succession of phenomena in the tube and the effects of initial pressure and length of tube.

A preliminary critical comparison is made of mathematical theory and experimental and the advantages of the use of shock tubes are enumerated.

1. Description et théorie d'un tube à choc

1.1. Principe

Un tube à choc se compose essentiellement d'un tube rectiligne partagé en deux sections par une membrane étanche (Fig. 1); la chambre de compression H.P. et la chambre de détente B.P. La chambre de compression est remplie de gaz comprimé. Dans la chambre de détente règne la pression atmosphérique ou un vide partiel.

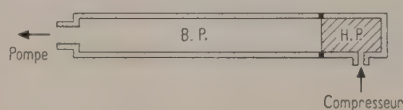


Fig. 1. Schéma d'un tube à choc.

Pour un rapport de pression donné entre les deux chambres, la membrane est crevée. Il se forme alors (Fig. 2) une onde de choc qui se propage en avant dans la chambre de détente et une onde de raréfaction qui se propage en arrière dans la chambre de compression. La masse de gaz comprimé de la chambre H.P., libérée par la rupture de la membrane se détend dans la chambre B.P., donc se re-

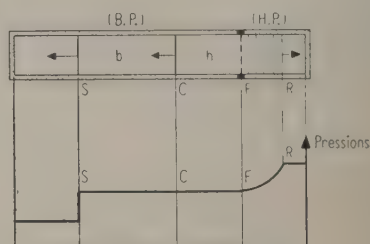


Fig. 2. Répartition des pressions le long du tube à un instant (t) après la rupture de la membrane.

froidit et comprime le gaz contenu dans celle-ci, lequel s'échauffe.

Si l'on observe le phénomène dans sa propagation dans la chambre B.P., on peut voir une onde de choc (S) de vitesse supersonique, suivie d'un écoulement de gaz (b) échauffé et comprimé; sa masse est d'autant plus importante que l'onde de choc est plus éloignée de la section initiale de séparation des deux chambres, et sa vitesse est sub-, trans-, ou supersonique suivant l'intensité du choc. Vient ensuite la masse de gaz (h) contenu dans la chambre H.P., à la même vitesse et à la même pression que (b), mais à température plus froide.

Entre ces deux masses de gaz, une séparation (plus ou moins nette), appelée surface de contact (C) ou front thermique.

Au bout d'un certain temps, l'onde de choc parvenue à l'extrémité de la chambre B.P. du tube se réfléchit et revient en arrière créant une zone de fluide stagnant. La tête de l'onde de raréfaction (R) se réfléchit à l'extrémité de la chambre H.P., puis se propage dans la chambre B.P. avec une vitesse accrue; la queue de l'onde de raréfaction (F) peut se propager dans l'un ou l'autre sens selon la vitesse propre du milieu où elle se trouve, c'est-à-dire selon l'intensité du choc. Elle arrive elle-même dans le champ d'observation, et le phénomène devient de plus en plus complexe.

Naturellement la durée de ces écoulements, l'ordre dans lequel ils se présentent dans la section d'observation, leurs caractéristiques (vitesse, température, pression) sont fonction du rapport initial des pressions de part et d'autre de la membrane et de la longueur respective des deux chambres.

1.2. Description

Un certain nombre de tubes à choc sont déjà utilisés en laboratoire, particulièrement en Amérique. Ces tubes sont très souvent en acier soudé, d'épaisseur suffisante pour résister aux surpressions; la section rectangulaire, nettement plus haute que large, donne des ondes de choc bien rectilignes et permet le montage de fenêtres pour l'observation optique. La surface intérieure est soignée afin de ne pas donner lieu à des réflexions parasites; l'étanchéité permet un vide assez poussé si l'on désire des chocs intenses donc de grands rapports de pressions. Les dimensions sont très variables, et fonction de l'usage auquel on destine le tube: généralement de quelques centimètres de section, leur longueur s'étale jusqu'à 15 mètres et souvent davantage. L'air est le fluide le plus employé, mais quelquefois d'autres gaz (hydrogène, hélium, ...) sont utilisés pour obtenir des chocs plus intenses avec un rapport initial de pressions limité.

La section intérieure n'est pas toujours uniforme et certains tubes présentent des changements de sections en vue d'augmenter la vitesse des écoulements ou la résistance des parois. De même, l'emploi de plusieurs membranes espacées permet d'obtenir des chocs plus intenses.

Nous n'insisterons pas sur les divers montages optiques et électroniques qui équipent ces tubes, et qui sont naturellement adaptés aux études que l'on se propose.

1.3. Théorie

En supposant l'écoulement unidimensionnel, on établit les équations fondamentales du tube à choc à

partir desquelles on peut écrire un certain nombre de relations utiles que nous citerons ici pour mémoire (voir bibliographie; principalement les travaux de R. K. LOBB, F. W. GEIGER et C. W. MAUTZ).

Notations

| | |
|-------------------------------------|---|
| P_H | pression initiale dans la chambre haute pression, |
| P_B | pression initiale dans la chambre basse pression, |
| $P = P_H/P_B$ | rapport initial des pressions de part et d'autre de la membrane, |
| $P_h = P_b$ | pression dans l'écoulement h et b, |
| $\xi = P_B/P_b$ | rapport de pression avant et après l'onde de choc, |
| ξ' | rapport de pression avant et après l'onde de choc réfléchie, |
| U | vitesse de l'onde de choc se propageant dans la chambre de détente, |
| U' | vitesse de l'onde de choc après réflexion, |
| $v_h = v_b$ | vitesse des écoulement h et b, |
| a | vitesse locale du son, |
| M | nombre de Mach, |
| T | température absolue, |
| $\gamma = C_p/C_v$ | rapport des coefficients des chaleurs spécifiques, |
| $\mu = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, | |
| x | abscisse mesurée à partir de la membrane, |
| L | longueur d'une section du tube, |
| L_B | longueur totale de la chambre de détente, |
| L_H | longueur totale de la chambre de compression, |
| L_W | distance de la section de la membrane à la section d'observation, |
| t | temps compté à partir de l'éclatement de la membrane. |

Relation fondamentale entre le rapport initial des pressions P , et le rapport des pressions en amont et en aval du choc ξ .

$$\frac{P_B}{P_H} = \frac{1}{P} = \xi \left[1 - \frac{1 - \xi}{\sqrt{(\mu + 1) \xi (\mu + \xi)}} \right]^{\mu + 1}.$$

Dans la deuxième partie de cet article on relate des expériences faites dans un tube rempli d'air dans les deux chambres, si bien que l'on peut admettre que $\gamma_B = \gamma_H = \frac{7}{5}$ et $\mu = 6$; d'où

$$\frac{P_B}{P_H} = \xi \left[1 - \frac{1 - \xi}{\sqrt{7 \xi (6 + \xi)}} \right]^7.$$

Onde de choc

$$U = a_B \sqrt{\frac{\xi + 6}{7 \xi}},$$

$$U' = a_B \frac{2 + 5 \xi}{\sqrt{7 \xi (6 + \xi)}},$$

$$\xi' = \frac{1+6\xi}{8-\xi}.$$

Ecoulements b et h

$$v_b = v_h = a_B \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}},$$

$$a_b = a_B \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi(6+\xi)}},$$

$$M_b = \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7(1+6\xi)}},$$

$$a_h = a_H (P_h/P_H)^{1/7},$$

$$M_h = \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi) - (1-\xi)}}.$$

Onde de raréfaction

$$v_R = a_H.$$

Après réflexion, le front de l'onde de raréfaction se dirige vers la chambre de détente et rattrape F et C.

Entre F et C :

$$v_{R'} = v_h + a_h = a_B \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}} + a_H \left(\frac{P_h}{P_H} \right)^{1/7}.$$

Entre C et S :

$$v_{R'} = v_b + a_b = a_B \left[\frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}} + \sqrt{\frac{1+6\xi}{\xi(6+\xi)}} \right].$$

Rapport des températures avant et après le choc

$$\frac{T_b}{T_B} = \left(\frac{a_b}{a_B} \right)^2 = \frac{1+6\xi}{\xi(6+\xi)}.$$

Durée des écoulements

Temps que met l'onde de choc pour parvenir à la section d'observation W :

$$t_{SW} = L_W \frac{dt}{dx_S} = \frac{L_W}{a_B} \sqrt{\frac{7\xi}{6\xi}}.$$

Temps que met la surface de contact pour parvenir en W :

$$t_{CW} = \frac{L_W}{a_B} \frac{\sqrt{7\xi(6+\xi)}}{5(1-\xi)}.$$

Temps que met la queue de l'onde de raréfaction pour parvenir en W :

$$t_{FW} = L_W \left[a_B \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}} - a_B \left(\frac{P_h}{P_H} \right)^{1/7} \right]^{-1}$$

en supposant que $v_b > a_h$.

Temps que met l'onde de choc réfléchie pour parvenir en W :

$$t_{S'W} = \frac{L_B}{U} + \frac{L_B - L_W}{U'} = \frac{L_B}{a_B} \sqrt{\frac{7\xi}{6+\xi}} + \frac{L_B - L_W}{a_B} \frac{\sqrt{7\xi(6+\xi)}}{2+5\xi}.$$

Temps que met le front de l'onde de raréfaction R pour rencontrer la queue F :

$$t_{RF} = \frac{L_H}{a_B} \left(\frac{P_b}{P_H} \right)^{-3/7}.$$

Temps que met R pour rencontrer C :

$$t_{RC} = 2 t_{RF}.$$

Temps que met R pour parvenir en W :

$$t_{RW} = t_{RF} + \frac{L_W - x_{RF}}{v_h + a_h} \quad \text{lorsque C est en W avant R (chocs intenses),}$$



Fig. 3. Vue générale du laboratoire.

$$t_{RW} = t_{RC} + \frac{L_W - x_{RC}}{v_b + a_b} \quad \text{lorsque R est en W avant C (chocs faibles).}$$

2. Étude expérimentale

2.1. Appareillage (voir Fig. 3, vue générale du Laboratoire)

Nous avons utilisé successivement trois tubes construits par l'atelier du C.R.S.I.M., rectangulaires et de section intérieure 8 cm × 16 cm. Ils sont en acier de 7 mm soudé électriquement.

Tube 1:

Longueur totale: 190 cm,
Longueur de la chambre H.P.: 40 cm,
Longueur de la chambre B.P.: 150 cm,
 $L_W = 116$ cm.

Tube 2:

Longueur totale: 420 cm,
Longueur de la chambre H.P.: 70 cm,
Longueur de la chambre B.P.: 350 cm,
 $L_W = 315$ cm
(c'est-à-dire à peu près vingt fois la plus grande dimension).

Tube 3:

Ce tube n'est autre que le tube n° 2, dans lequel nous avons permuté la section d'observation avec l'élément précédent, afin de retarder la venue dans le champ d'observation de l'onde de choc réfléchi sur l'extrémité de la chambre de détente.

$L_W = 215$ cm
(c'est-à-dire plus de treize fois la plus grande dimension).

Nous ne nous étendrons pas sur la réalisation de ces tubes et des dispositifs d'observation et de mesure qui ont fait l'objet d'une description détaillée dans la référence [7] (voir pages 68 et suivantes). Nous signalerons toutefois qu'aux montages optiques de striographie et d'ombrographie utilisés dans les premiers essais, nous avons adjoint récemment une caméra électronique fournie par le Laboratoire Central de l'Armement¹.

Cette caméra fait partie du dispositif de visualisation dont le schéma est donné sur la Fig. 4. Un générateur d'étincelle alimente 16 éclateurs linéaires (S) à étincelle glissante qui jouent à la fois le rôle de sources de lumière et d'obturateurs ultra-rapides ($< 10^{-6}$ seconde). Ces éclateurs sont disposés dans le plan central d'un miroir sphérique con-

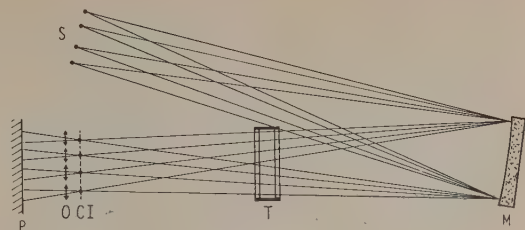


Fig. 4. Dispositif de visualisation;

- S éclateurs linéaires,
- M miroir sphérique concave,
- T fenêtres de la section d'essai du tube à choc,
- I images des sources,
- C couteaux de strioscopie,
- O objectifs donnant une image du phénomène situé en T sur la plaque photographique P.

cave (M) (50 cm de diamètre, 600 cm de rayon de courbure).

Les fenêtres du tube de choc (T) sont placées dans le trajet de retour des rayons lumineux, à 200 cm du miroir. Les images des sources (I) (à 400 cm du tube et à 600 cm du miroir) viennent se former sur 16 couteaux (C) disposés sur une platine et réglables individuellement. Derrière chaque couteau se trouve un objectif donnant une image du phénomène situé dans le tube sur une plaque photographique (P) unique pour les seize dispositifs; on obtient ainsi seize vues séparées sur une seule plaque (24 mm × 30 mm).

La fréquence de prise de vue peut atteindre 500 000 Hz. Elle est commandée par un générateur d'impulsion constitué par un oscillateur à quartz, ou encore un générateur du commerce à fréquence réglable dont les oscillations sinusoïdales sont transformées en impulsions rectangulaires.

Le signal de synchronisation, permettant l'amorçage de la première étincelle lors du passage du phénomène à visualiser dans le champ d'observation,

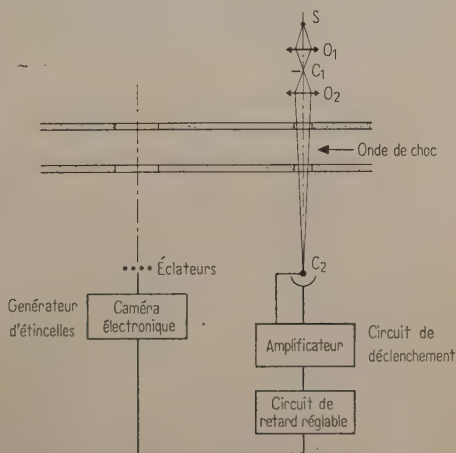


Fig. 5. Dispositif de synchronisation.

¹ Nous tenons à remercier particulièrement ici Monsieur l'Ingénieur Général P. FAYOLLE et Monsieur l'Ingénieur P. DEVAUX, des Fabrications de l'Armement, pour leur obligeance et le concours qu'ils n'ont cessé de nous prodiguer durant cette étude.

est fourni par un circuit de déclenchement. Un barrage optique, situé en amont de la section d'observation sur le tube (Fig. 5), donne une variation de flux lumineux reçu par une cellule photoélectrique lors du passage de l'onde de choc. Un circuit de retard, réglable, transmet ce signal à l'entrée de la caméra.

Par une série de plaques photographiques successives, en augmentant progressivement le retard de déclenchement de manière que la première vue d'une plaque suive immédiatement la seizième vue de la plaque précédente, nous avons pu observer le phénomène dans toute son étendue.

Les vues (prises en des instants différents et à intervalle régulier) sont ensuite photographiées dix fois sur un film de 16 mm à l'aide d'une caméra ordinaire. On obtient ainsi un film au ralenti des écoulements.

2.2. Résultats

2.2.1. Aspect du phénomène en fonction du temps

Les striogrammes des Fig. 6 à 16 et les ombrogrammes des Fig. 17 et 18 ont été pris à vue séparée, c'est-à-dire qu'à chacune d'elles correspond une expérience distincte. En augmentant progressivement le retard de l'impulsion de commande nous avons pu reconstituer le film du phénomène complet.

Nous rappelons que nous désignons par P le rapport initial des pressions de part et d'autre de la membrane avant la rupture.

La chambre de compression est toujours située à droite des photographies, et l'écoulement a lieu de la droite vers la gauche.

Les Fig. 7, 9, 10, 11 et 12 ont été prises à $50 \mu s$ d'intervalle. On remarquera l'onde de choc réfléchie par la maquette se propageant vers la chambre de compression (située à droite de la figure), car sa vitesse U' est supérieure à la vitesse de l'écoulement v_b le choc étant faible. Sur les Fig. 11 et 12, il y a également réflexion sur les parois latérales du tube, ce qui complique le phénomène.

Sur la Fig. 13 (prise $1680 \mu s$ après la Fig. 12), on ne voit que l'écoulement subsonique: $M_b = 0,417$.

Sur la Fig. 14, on voit la surface de contact (C) entre les deux écoulements à température différente.

L'écoulement en aval (à gauche de la photo) est régulier, utilisable comme soufflerie — c'est l'air de la chambre de détente comprimé par le contenu de la chambre de compression. Par contre, l'écoulement en amont (à droite de la photo) est turbulent, inutilisable malgré son nombre de Reynolds et de Mach élevés, car cette masse d'air provenant de la chambre de compression a dû traverser la membrane imparfaitement rompue.

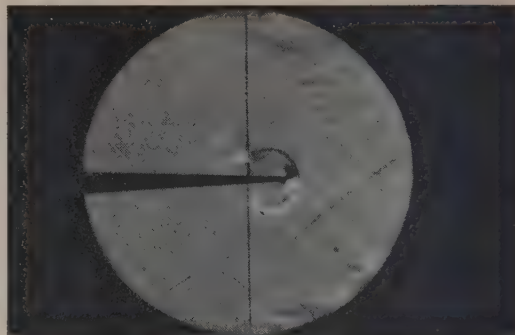


Fig. 6. Dièdre de 5° ; $P=10$.

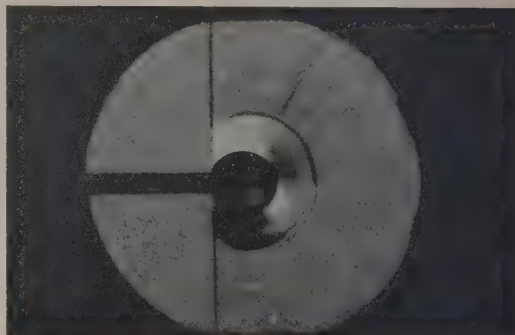


Fig. 7. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

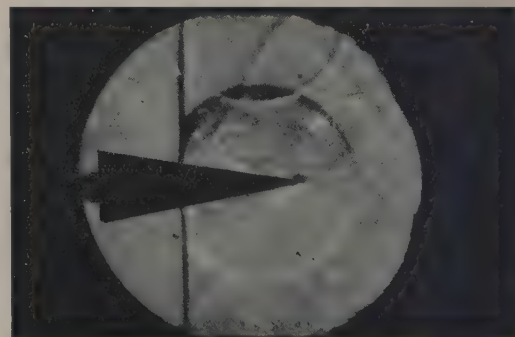


Fig. 8. Dièdre de 20° ; $P=3,6$.

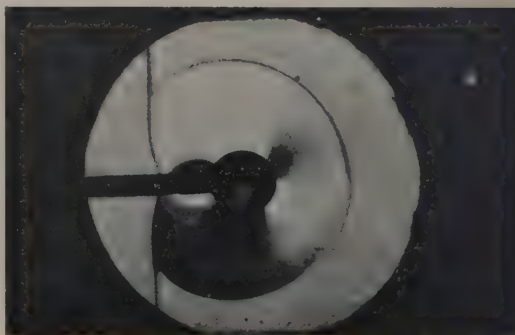


Fig. 9. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

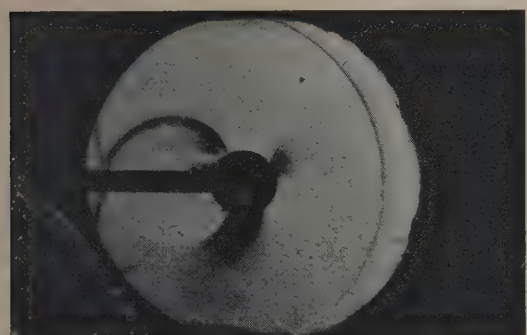


Fig. 10. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

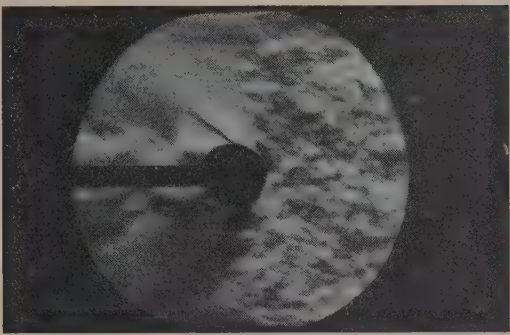


Fig. 14. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=50,6$.

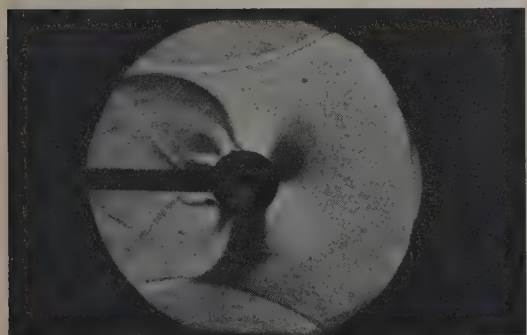


Fig. 11. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

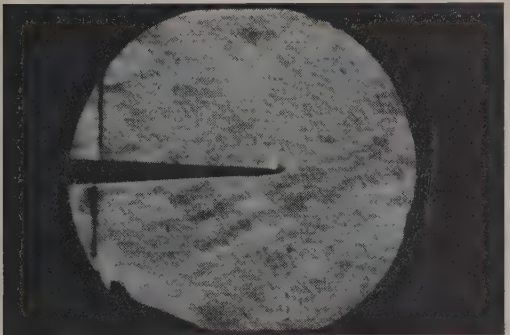


Fig. 15. Dièdre de 5° ; $P=3,6$.

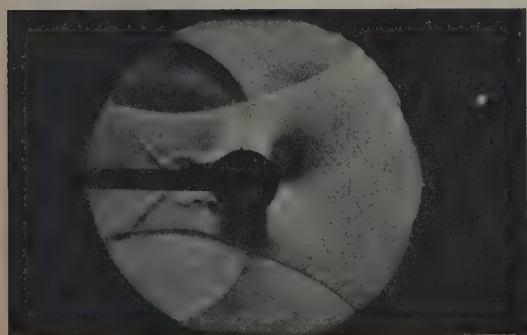


Fig. 12. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

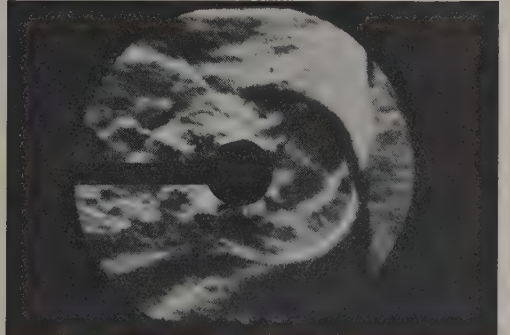


Fig. 16. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.

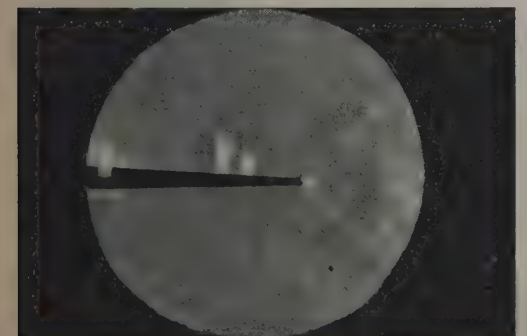


Fig. 13. Dièdre de 5° ; $P=3,6$.

A remarquer que la surface de contact n'est pas rectiligne, comme le suppose la théorie.

Les Fig. 15 et 16, prises $4398 \mu s$ et $4538 \mu s$ après l'éclatement (tube n° 1), montrent l'onde de choc qui, parvenue à l'extrémité de la chambre de détente, s'est réfléchi et remonte le courant avec une vitesse U' ralentie, créant derrière elle une zone de fluide stagnant.

Les Fig. 17 et 18 sont des ombrogrammes montrant sous un aspect un peu différent la réflexion d'une onde de choc sur un cylindre.

Les striogrammes des Fig. 19 et 20 ont été obtenus avec la caméra électronique, c'est-à-dire que 16

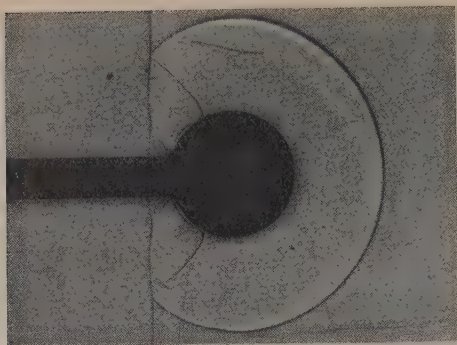
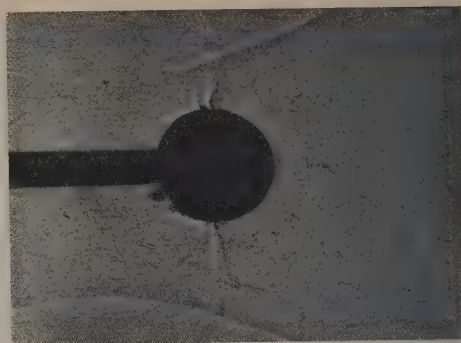
Fig. 17. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.Fig. 18. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$.Fig. 19. Cylindre de 30 mm de diamètre; $P=3,6$; fréquence de prise de vues: 33 000.



Fig. 20. Dièdre de 20° ; $P=93$; fréquence de prise de vues: 200 000.

vues successives correspondent à une seule expérience dans le tube. Sur la Fig. 18, il s'est écoulé $480 \mu\text{s}$ de la vue 1 (en haut et à droite) à la vue 16 (en bas et à gauche). Sur la Fig. 20, il s'est écoulé entre les mêmes vues $80 \mu\text{s}$ seulement.

2.2.2. Rôle de la pression

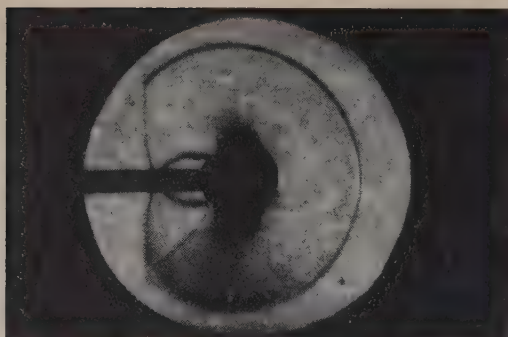
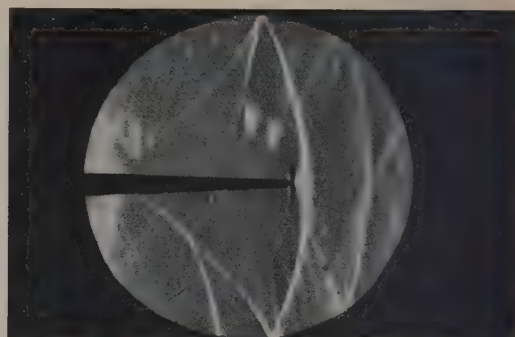
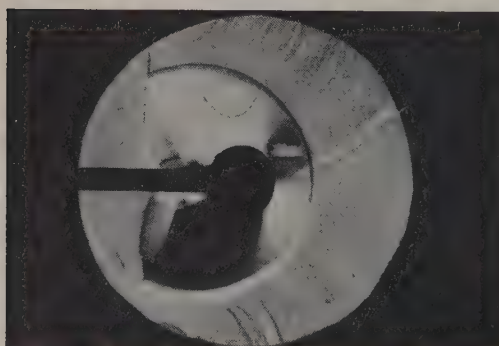
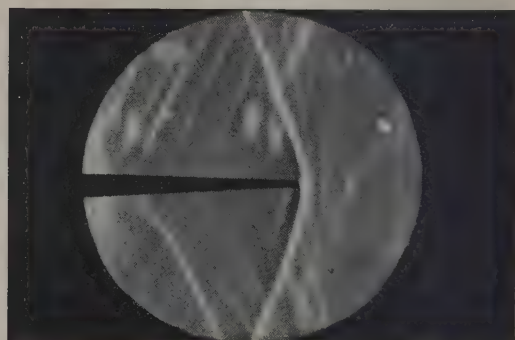
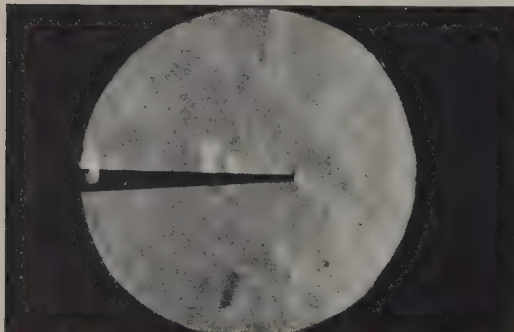
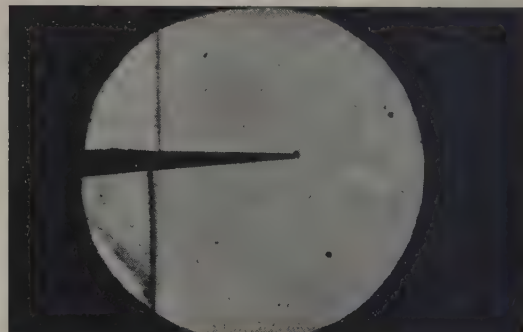
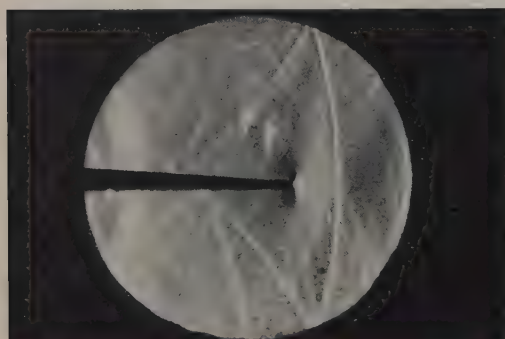
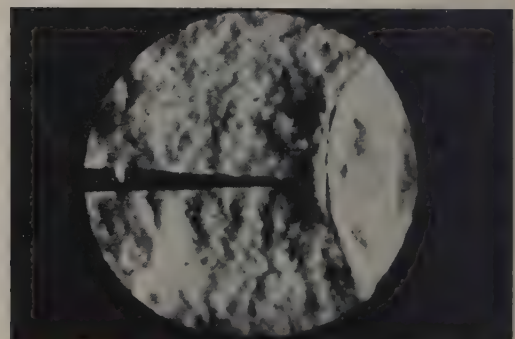
Le rapport initial des pressions, de part et d'autre de la membrane, conditionne l'intensité du choc, la vitesse des écoulements et leur température.

On remarquera que l'onde réfléchie se trouve beaucoup plus près du nez de la maquette sur la Fig. 22 que sur la Fig. 21, la vitesse de l'écoulement opposée à la propagation de l'onde étant plus grande.

Sur les Fig. 23, 24, 25 et 26 on peut suivre l'augmentation de la vitesse de l'écoulement en fonction du rapport de pression P . Pour un écoulement subsonique, l'onde réfléchie n'atteint pas une position d'équilibre et remonte le courant (plus visible sur la Fig. 23). Par contre, pour un écoulement trans- et supersonique l'onde réfléchie reste (attachée ou détachée suivant le nombre de Mach) stationnaire (Fig. 24, 25 et 26).

Le rapport P conditionnant les vitesses des différents phénomènes se propageant dans le tube, change naturellement l'ordre d'apparition des phénomènes observés.

Ainsi sur les Fig. 27 et 28, on remarque que la

Fig. 21. Cylindre; $P=3,6$; $M=0,417$.Fig. 25. Ecoulement supersonique; $P=93$.Fig. 22. Cylindre; $P=93$; $M=1,134$.Fig. 26. Ecoulement supersonique; $P=152$.Fig. 23. Ecoulement subsonique; $P=3,6$.Fig. 27. Dièdre de 5° ; $P=3,6$.Fig. 24. Ecoulement transsonique; $P=46,2$.Fig. 28. Dièdre de 5° ; $P=93$.

venue vers le champ d'observation de l'onde de choc réfléchi s'effectue dans l'écoulement régulier (b) (Fig. 27) et, par contre, dans l'écoulement turbulent (h), qui suit la surface de contact (Fig. 28).

2.2.3. Rôle de la longueur du tube

La succession des phénomènes dans le champ d'observation dépend du chemin parcouru par chacun d'eux, donc de la longueur relative des éléments du tube. Ainsi l'onde de choc réfléchi parvient dans le champ d'observation après le passage de la surface de contact (Fig. 29) lorsqu'on utilise le tube n° 1 et, au contraire, avant cette surface (Fig. 30) lorsqu'on utilise le tube n° 2, plus long en amont.

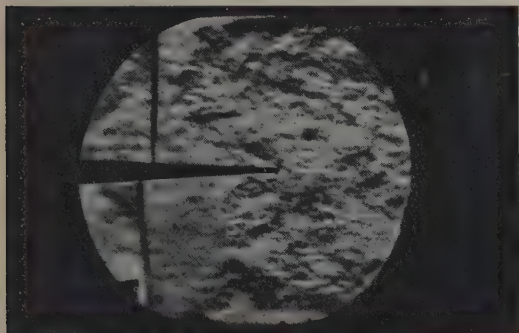


Fig. 29. Dièdre de 5° ; $P=10$; tube 1 (3 790 μ s après le choc).

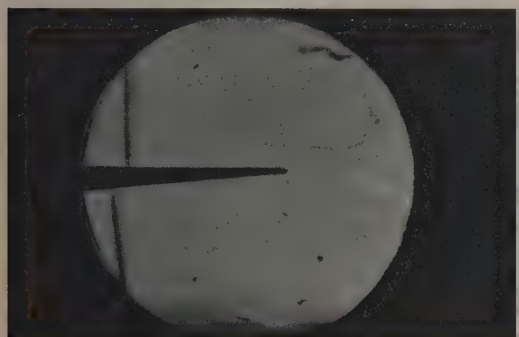


Fig. 30. Dièdre de 5° ; $P=10$; tube 2 (7 421 μ s après le choc).

2.3. Critiques

Nous avons vu qu'à partir du rapport initial des pressions il était facile de calculer les vitesses, les températures et la succession dans le temps des différents phénomènes qui se propagent dans le tube. En fait, l'expérience diffère quelque peu des prévisions théoriques.

Tout d'abord la membrane n'est pas une surface plane, rigoureusement perpendiculaire aux parois et disparaissant instantanément. Avant la rupture, elle s'incurve, les fissures partent de la partie cen-

trale que l'on vient de perforer. L'énergie nécessaire pour la déchirer, pour en arracher les fragments et pour les projeter, est fournie par l'air contenu dans la chambre de compression; si bien que cette masse gazeuse, qui sort dans les premiers instants comme un jet, ne peut se comporter comme un piston parfait. Il y a mélange de l'air se trouvant initialement dans la chambre de compression avec celui de la chambre de détente, ce qui peut expliquer en partie que la surface de contact arrive plus tôt que prévu dans la section d'observation, qu'elle n'est pas plane et est suivie d'un écoulement turbulent.

L'onde de compression, au début, n'est pas unique; initialement il se produit des suites d'ondes de compression élémentaires très rapprochées, de forme approximativement sphérique et qui, en se réunissant de façon plus ou moins ordonnée, forment l'onde de choc finale qui de ce fait est un peu inférieure à la somme des pressions individuelles.

Nous avons constaté que la vitesse de l'onde de choc est inférieure à la vitesse calculée et que cet écart est d'autant plus important que le rapport P des pressions est plus grand.

Autres sources d'erreurs: la présence d'une couche limite sur la paroi du tube. Cette couche limite, d'épaisseur nulle au front de l'onde de choc, s'épaissit, atteint un maximum à la surface de contact, puis décroît progressivement jusqu'au front de l'onde de raréfaction.

Le fluide n'est pas parfait comme le suppose la théorie: il y a viscosité, transfert de chaleur entre le tube et l'écoulement.

De plus dans nos calculs, nous avons supposé la vitesse du son constante dans les deux chambres. En fait, elle dépend de l'état hygrométrique et de la température. Le rapport des chaleurs spécifiques γ que nous avons pris égal à $\frac{7}{5}$ et constant, dépend lui aussi de la température.

Si l'on joint à cette liste les effets de la discontinuité de la paroi intérieure du tube (due aux joints entre les sections), les erreurs de lecture des pressions, l'étanchéité toute relative du tube et de la membrane, etc. . . ., on peut être étonné que les phénomènes soient si bien reproductibles.

Par une suite d'expériences dans les trois tubes précités, en utilisant de l'air non desséché, pour des rapports de pressions inférieurs à 100, nous avons pu constater que:

l'onde de choc expérimentale est légèrement en retard sur l'horaire de l'onde théorique;

sa vitesse est constante le long du tube étudié;

la surface de contact des deux écoulements est nettement en avance sur le calcul;

ces écarts sont d'autant plus importants que le choc est plus intense;

l'écoulement (h) provenant de l'air primitivement contenu dans la chambre de compression n'est pratiquement pas utilisable à cause de sa turbulence.

2.4. Avantages

Lorsqu'on utilise le tube à choc comme soufflerie, on constate que les temps d'amorçage étant comparativement plus courts et l'épaisseur de la couche limite plus faible, les chances de blocage de la veine sont moindres que dans une soufflerie.

Par contre l'instabilité est plus grande.

Les écoulements réguliers sont de très courte durée, ce qui, dans certains cas, peut gêner l'observation complète de phénomènes tourbillonnaires.

Mais le tube à choc offre l'incontestable avantage de pouvoir travailler, sans préparations longues et délicates, au nombre de Mach désiré et en particulier au voisinage de $M = 1$.

(Reçu le 29 Juillet 1958.)

Bibliographie

- [1] SCHARDIN, H., Sur le tube à onde de choc. Compte rendu de conférence sur les problèmes de la combustion, la déformation, les ondes de choc. Direction des Études et Fabrications de l'Armement, Laboratoire de Recherches Techniques de Saint-Louis-Haut-Rhin.
- [2] LOBB, R. K., Étude des écoulements supersoniques dans un tube de choc. Institute of Aerophysics, University of Toronto, Report No. 8, May 1950.
- [3] BLEAKNEY, W., WEIMER, D. K. et FLETCHER, C. H., Le tube de choc: appareil facilitant des études de dynamique des fluides. Rev. Sci. Instrum. **20** [1949], 807—815; traduction C.R.S.I.M., n° t. 19—1950.
- [4] GEIGER, F. W. et MAÜTZ, C. W., Le tube de choc, en tant qu'instrument pour l'étude des écoulements transoniques et supersoniques. Engineering Research Institute University of Michigan, Ann Arbor, Project M 720-4. A report on work done under Office of Naval Research Contract N. 6—ONR 232 between April 1947 and June 1949.
- [5] TRIMPL, R. L. et COHEN, N. B., Prévision théorique de l'écoulement des gaz réels dans les tubes de choc; vérification expérimentale. NACA, N.T. 3375, Washington, March 1956.
- [6] MERLE, M., Tube de choc. Note C.R.S.I.M., No. 267, 17 Janvier 1951.
- [7] MERLE, M., Étude expérimentale des écoulements gazeux. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, No. 308, 1956.

Buchbesprechung

Schwingungstechnik, VDI-Berichte Band 35, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure, VDI-Verlag, Düsseldorf 1959, 178 Seiten, 258 Bilder, 14 Zählentafeln, DIN A 4, DM 33,20.

Die auf der 3. VDI-Schwingungstagung in Stuttgart 1958 gehaltenen Vorträge, die in diesem Band der VDI-Berichte zusammengestellt sind, lassen sich unter drei Hauptthemen zusammenfassen:

1. Mathematische und numerische Behandlung von Schwingungsaufgaben (ZURMÜHL, PESTEL, FUHRKE, FEDERN, BENZ);
2. Schwingungsprobleme und Schwingungsmessungen an Fahrzeugen (WAAS, PLESS, HOTTINGER, HOFFMANN, LIPOWY, CHIESA, BETZOLD, SCHICK, PIATSCHEK, DIECKMANN, KRÄMER);
3. Geräuschprobleme und Geräuschmessungen (SCHUBERT, LÜBCKE, MARTIN).

Die Vorträge der ersten Gruppe behandeln vor allem die neueren und praktisch bedeutsamen Verfahren zur Schwingungsberechnung von mehrfach gelagerten Wellen sowie ebenen und räumlichen Stabwerken mit Hilfe der Matrizenrechnung. Das Prinzip ist ähnlich dem bei linearen, elektrischen und akustischen Systemen angewandten Verfahren; es ist durch Aufstellung von Über-

tragungsmatrizen für eine große Anzahl technischer Schwingungsaufgaben und durch den Einsatz von digitalen Rechenanlagen von vornherein sehr stark auf die praktische Rechnung zugeschnitten. Die Arbeiten seien der Aufmerksamkeit der Akustiker besonders empfohlen. An Stelle des Impedanzbegriffes wird in der Mechanik vorwiegend die dynamische Steifigkeit, der komplexe Quotient aus Kraft und Ausschlag verwendet.

Die Vorträge über Schwingungsprobleme vermitteln eine Menge an Erfahrungen aus dem Gebiet der Schwingungsbekämpfung an Schiffen, Schienen- und Straßenfahrzeugen. Es wird auch auf die Einwirkung von Schwingungen auf den Menschen eingegangen.

Aus der Akustik wurde behandelt: Geräuschmessung durch Geräuschbewertungskurven, die mit 3 dB je Oktave abfallen. Hieraus wird ein graphisches Verfahren für die „Geräuschstufung“ und ein neuer „Lärmmesser“ abgeleitet (LÜBCKE). Ferner wurden Erfahrungsberichte über Geräusche von Grubenlüftern (SCHUBERT) und über akustische Filter bei großen Druckamplituden in Abgasanlagen von Motoren (MARTIN) gegeben. In letzterem Fall wird festgestellt, daß die lineare akustische Theorie den wesentlichen Ablauf des Geschehens auch bei großen Schallamplituden mit genügender Genauigkeit wiederzugeben gestattet.

W. WILLMS

ON THE THERMOELASTIC WAVES IN LIQUIDS

by É. I. TAKIZAWA

Institute of Applied Physics, Nagoya University, Japan

Summary

For a system showing relaxation phenomena there is calculated, for the isothermal case of small relaxation coefficients, the specific heat and thermal conductivity according to both the DEBYE and the BRILLOUIN theories.

The theoretical results agree, in the special case of a system having shear viscosity, closely with the expressions obtained by LUCAS.

Sommaire

Dans le cas d'un système présentant de la relaxation, on a calculé, en régime isotherme et pour de faibles coefficients de relaxation, la chaleur spécifique et la conductivité thermique. Ces valeurs sont conformes aux deux théories de DEBYE et de BRILLOUIN.

Les résultats théoriques relatifs au cas spécial d'un système doué de viscosité de cisaillement sont tout à fait en accord avec les expressions obtenues par LUCAS.

Zusammenfassung

Für ein System mit Relaxationserscheinungen werden unter der Annahme kleiner Relaxationskoeffizienten und isothermer Vorgänge die spezifische Wärme und die Wärmeleitfähigkeit auf Grund der DEBYESchen sowie der BRILLOUINSchen Theorie berechnet.

Die erhaltenen Ergebnisse stimmen in dem Sonderfall eines Systems mit Schubviskosität mit den von LUCAS berechneten Beziehungen nahezu überein.

1. Preliminaries

Recently much experimental evidence concerning liquids has been accumulated and the results so far obtained have manifested the fact that liquids are more similar to solid crystalline bodies than to compressed gases at ordinary temperatures and moderate pressures. The thermodynamical characteristics of liquids, in particular, resemble those of the corresponding solid phases. At temperatures near the fusion point, a liquid must be more similar to a solid crystalline body with respect to its structure, character of thermal motion, and many kinds of mechanical properties. The application of the method of X-ray structure analysis to liquid bodies has shown that liquids consist of a very large number of randomly orientated crystals of sub-microscopic size, smaller than 10^2 Å in diameter. This can also be interpreted from the very close similarity in the X-ray diagrams between a liquid and its corresponding solid phase.

The hyperfine structures observed in the spectrum of scattered monochromatic light have directly proved the existence of thermal motion or *thermoelastic waves* in liquids. According to the theory of specific heat proposed by DEBYE [1], the thermal energy of a solid body is distributed among three thermoelastic waves, one longitudinal and two transverse. The fact that the difference between the specific heat of a liquid and its corresponding solid

is rather small, may lead us to apply the DEBYE theory to liquids.

In the case of liquids, so similar to solids in their structure, it is quite possible to estimate the internal energy by assuming the motion to consist of thermal waves in the liquids. Thus we can calculate the specific heat of liquids in a way similar to the DEBYE theory, even in phases of high viscosity and of rigidity of a transient nature. As the starting point in calculating the specific heat, DEBYE took the stress-strain relation for the perfectly elastic solid body. On the other hand, LUCAS [2] started from the expression of Stokes, applicable to viscous fluids. BRILLOUIN [3] considered that the compressional wave remains in liquids but that the energy of the two transverse waves dissipates into the rotation of molecules. OOMORI [4] treated the equation of motion of a plasto-elastic body presented by FRENKEL and OBRATZOV [5].

For the present treatment of the thermodynamical character of liquids, we shall take a generalized stress-strain relation [6], [7], [8], which is directly proved from the viewpoint of the theory of irreversible thermodynamics [9]. Accordingly, we are now in a position where we may treat the specific heat of the general system with relaxation phenomena. But, for the sake of simplicity, we shall here consider the specific heat of liquids.

The notations and their physical meaning as used here are listed at the end of this paper.

2. Fundamental equations

The generalized equations of state (stress-strain relations) are written as

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

where \mathbf{A} is stress tensor, $\boldsymbol{\sigma}$ strain tensor, and \mathbf{E} the so-called complex elastic modulus. The latter is decomposed as

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1(D, \tau).$$

\mathbf{E}_0 is the tensor of elastic moduli, and τ is a parameter which shows the aggregate of the so-called relaxation times. When τ tends to infinity, $\mathbf{E}_1(\infty)$ represents the extra moduli of elasticity of the material.

In rheological media such as viscoelastic bodies, if the volume dilatation is produced suddenly and kept constant (i.e. kept in an isostrained state), normal stress decays after a sufficiently long time and finally vanishes. While, in liquids, pressure also decays after a sufficiently long time, does not vanish but finally approaches a constant value, still remaining finite. This is the main difference between solid-like and liquid-like materials.

For the visco-elastic body, we can express eq. (1) more concretely [8], [9], for example, by taking into consideration the linear deformation of the substance, which is subjected to the Maxwellian relaxation process,

$$A_{ij} = p_0 \delta_{ij} - \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{\lambda_r' D}{1 + \tau_r D} - \frac{2}{3} \sum_{r=1}^m \frac{\mu_r' D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} - 2 \sum_{r=1}^m \frac{\mu_r' D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \sigma_{ij}, \quad (1a)$$

where k_0 is the volume modulus, or

$$A_{ij} = \left(C_{ijkl} - \sum_{\gamma=1}^n \frac{Q_{ij\gamma} Q_{kl\gamma}}{1 + D \tau_\gamma} \right) \sigma_{kl}, \quad (1b)$$

where C_{ijkl} and Q 's are all material constants [9] ($i, j, k, l = 1, 2, 3$). These equations (1a) and (1b) can serve as the stress-strain relation for rheological bodies. As usual in the tensorial notations, one should sum up over repeated indices.

3. Internal energy, specific heat and thermal conductivity of a liquid

Taking a plane progressive wave, we put

$$\xi_1 = \text{Re}(\xi e^{i\omega t - \beta_1 x_1}), \quad \text{Re}(\beta_1) > 0, \quad \text{Im}(\beta_1) > 0, \quad (2)$$

$$\xi_2 = \xi_3 = 0, \quad \partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = 0.$$

For the transverse wave we put, in an analogous manner,

$$\tilde{\omega}_{lj} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) = \text{Re}(\tilde{\omega}_{lj} e^{i\omega t - \beta_2 x}) \quad (l, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

$$\text{Im}(\beta_2) > 0, \quad \text{Re}(\beta_2) > 0.$$

Next we obtain the velocities v of the waves (longitudinal and transverse); and the absorption coefficients α per unit length, with suffixes l and t , respectively,

$$v_l = \omega / \text{Im}(\beta_1), \quad v_t = \omega / \text{Im}(\beta_2), \quad (4)$$

$$\alpha_l = \text{Re}(\beta_1), \quad \alpha_t = \text{Re}(\beta_2), \quad (5)$$

after solving the equations of motion

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}.$$

For example, if we take eq. (1a) with $l=1$ and $m=1$, i.e. one relaxation time for shear and one for compression, we obtain

$$v_l = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{\omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{\omega^2 \tau_1^{(1)2}}{1 + \omega^2 \tau_1^{(1)2}} \right),$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2 \mu_1 \tau_1^{(1)} \omega}{\rho} (\sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^{(1)2}} + \omega \tau_1^{(1)})^{-1/2}}, \quad (5a)$$

$$\alpha_l = \frac{\omega^2}{2 v_0} \left(\frac{\lambda_1}{k_0} \frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{\tau_1^{(1)}}{1 + \omega^2 \tau_1^{(1)2}} \right),$$

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2 \mu_1 \tau_1^{(1)}} (\sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^{(1)2}} - \omega \tau_1^{(1)})^{1/2}}$$

$$\text{with } v_0 = \sqrt{k_0/\rho},$$

under the assumption

$$\lambda_1/k_0 \ll 1 \quad \text{and} \quad \mu_1/k_0 \ll 1.$$

From the wave velocities, we get the internal energy of the liquid per unit volume:

$$F = F_l + F_t, \quad (6)$$

$$F_l = 4 \pi \int_0^{v_l^*} \frac{v^2}{\bar{w} v_l^2} g(v) dv, \quad (7)$$

$$F_t = 8 \pi \int_0^{v_t^*} \frac{v^2}{\bar{w} v_t^2} g(v) dv, \quad (8)$$

where F_l and F_t are the thermal energies of the longitudinal and transverse waves, respectively. v represents phase velocity and \bar{w} group velocity. The frequency distribution function $g(v)$ for v comes from Planck's law. v^* are the cut-off frequencies [1], [2], which come from the finite number of degrees of freedom in the system considered, and are written as

$$v_l^* = v_l A, \quad (9)$$

$$v_t^* = v_t A, \quad (10)$$

$$A = \left(\frac{3N}{4\pi M} \right)^{1/3}$$

with the Loschmidt number N and volume per gram molecule M .

The expressions (9) and (10) satisfy the following condition for the total degrees of freedom of constituent molecules, i. e. for the total number of the stationary waves:

$$3N = M \left(\int_0^{\nu_1^*} \frac{4\pi\nu^2}{\bar{w}_1\nu_1^2} d\nu + \int_0^{\nu_t^*} \frac{8\pi\nu^2}{\bar{w}_t\nu_t^2} d\nu \right).$$

The cut-off frequencies ν_1^* and ν_t^* are determined by use of eqs. (9), (10) and (5 a), and satisfy the equations

$$\nu_1^* = \nu_0 A \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{(p\nu_1^*)^2}{1 + (p\nu_1^*)^2} + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{(q\nu_1^*)^2}{1 + (q\nu_1^*)^2} \right],$$

and

$$\nu_t^* = \sqrt{\frac{2\mu_1 q \nu_t^*}{\rho}} A [V\sqrt{1 + (q\nu_t^*)^2} + q\nu_t^*]^{-1/2},$$

i. e.

$$\nu_1^* \div \nu_0 A \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{(p\nu_0 A)^2}{1 + (p\nu_0 A)^2} + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{(q\nu_0 A)^2}{1 + (q\nu_0 A)^2} \right], \quad (9a)$$

$$\nu_t^* = \frac{2\mu_1 q}{\rho} A^2 \left(1 + \frac{4\mu_1 q^2}{\rho} A^2 \right)^{-1/2} \quad (10a)$$

with $p = 2\pi\tau_1$ and $q = 2\pi\tau_1^{(1)}$. Thus the limiting frequencies ν_1^* and ν_t^* are determined as functions of τ_1 and $\tau_1^{(1)}$. Accordingly we can also find the temperature dependence of these frequencies, if we find out the temperature dependence of τ_1 and $\tau_1^{(1)}$ (cf. the expression (19)).

The group velocities \bar{w} are defined by

$$\frac{1}{\bar{w}_{1,t}} = \frac{d(\nu/\nu_{1,t})}{d\nu} = \frac{d(\omega/\omega_{1,t})}{d\omega} \quad (11)$$

and

$$g(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{h\nu}{2} \div kT \quad (12)$$

with Planck's constant h . At elevated temperatures we can put $g(\nu) = kT$, and we shall assume this hereafter.

When we take eq. (5 a) for liquids, we obtain from eq. (7):

$$F_1 = \frac{4\pi kT \nu_1^{*3}}{3\nu_0^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{(p\nu_1^*)^2}{1 + (p\nu_1^*)^2} - 2 \frac{\mu_1}{k_0} \frac{(q\nu_1^*)^2}{1 + (q\nu_1^*)^2} \right]. \quad (13)$$

As for the eq. (8) with $m = 1$, it is written by

$$F_t = \frac{\pi kT}{2} \left(\frac{\mu_1 \tau_1^{(1)} \pi}{\rho} \right)^{-3/2} \times \int_0^{\nu_t^*} \nu^{1/2} [V\sqrt{1 + (q\nu)^2} + q\nu]^{5/2} \times [1 + (q\nu)^2]^{-1/2} d\nu = \frac{kT \nu_t^{*3/2}}{3\pi^{1/2} \tau_1^{(1)3/2} \nu_{t\infty}^3} [V\sqrt{1 + (q\nu_t^*)^2} + q\nu_t^*]^{3/2} \quad (14)$$

with

$$\nu_{t\infty} = \sqrt{\mu_1/k_0}.$$

At temperatures near the fusion point, where liquids are very similar to solids in their structure, we can put $\tau \rightarrow \infty$ in the expression (13),

$$F_1 \div \frac{4\pi kT \nu_1^{*3}}{3\nu_0^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \left[1 - \frac{1}{(2\pi\tau_1 \nu_1^*)^2} \right] - 2 \frac{\mu_1}{k_0} \left[1 - \frac{1}{(2\pi\tau_1^{(1)} \nu_1^*)^2} \right] \right\} \quad (15)$$

$$\rightarrow \frac{4\pi kT \nu_1^{*3}}{3\nu_0^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} - 2 \frac{\mu_1}{k_0} \right) = \frac{N}{M} kT. \quad (16)$$

Thus the expression (13) approaches that for the internal energy of the corresponding solid body, and it is clear that the final expression (16) is just the expression presented by DEBYE.

On the other hand, in liquids it is more interesting to consider the effect of transverse waves than that of the longitudinal ones. Considering the approximation

$$\tau_1^{(1)} \rightarrow \infty,$$

in the expression (14), we can easily obtain

$$F_t \div \frac{3\pi kT \nu_t^{*3}}{3\nu_{t\infty}^3} \left[1 + \frac{3}{8(2\pi\tau_1^{(1)} \nu_t^*)^2} \right] \quad (17)$$

$$\rightarrow \frac{8\pi kT \nu_t^{*3}}{3\nu_{t\infty}^3} = \frac{2N}{M} kT. \quad (18)$$

The expression (17) corresponds to that of LUCAS and eq. (18) is just the contribution to the internal energy from the transverse waves in a solid body.

We may also consider that the temperature dependence of the relaxation time is expressed, according to EYRING [10] as

$$\tau = \tau^* \exp(\tilde{u}^*/kT), \quad (19)$$

where \tilde{u}^* is the so-called activation energy corresponding to the transition of a molecule from an equilibrium position to the other adjacent one, and is perhaps of order of magnitude of 0.1 eV. τ represents the mean life time of oscillation of the molecule. τ^* is the period of oscillation of the molecule at that point.

From eqs. (6), (13) and (14), we obtain the molar specific heat at constant volume C_v ,

$$C_v = M \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4\pi k M}{3 v_0^3} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \nu_1^* \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{(2\pi \tau_1 \nu_1^*)^2}{1 + (2\pi \tau_1 \nu_1^*)^2} - 2 \frac{\mu_1}{k_0} \frac{(2\pi \tau_1^{(1)} \nu_1^*)^2}{1 + (2\pi \tau_1^{(1)} \nu_1^*)^2} \right] \right\} + \frac{k M}{3 \pi^{1/2} v_{t\infty}^3} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{T \nu_1^{*3/2}}{\tau_1^{(1)3/2}} \left[\sqrt{1 + (2\pi \tau_1^{(1)} \nu_1^*)^2} + 2\pi \tau_1^{(1)} \nu_1^* \right]^{3/2} \right\}. \quad (20)$$

In the irreversible process, in which we are now interested, the damping coefficient plays a rather important role. This quantity is measured directly by ultrasonic experiments.

By applying the theory of thermal conduction in solids, which we owe to BRILLOUIN,⁸ to liquids, we obtain the thermal conductivity of liquids

$$\kappa = \kappa_l + \kappa_t, \quad (21)$$

$$\kappa_l = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\nu_1^*} \frac{1}{2\alpha_l} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\nu^2}{w_l \nu_l} g(\nu) \right] d\nu, \quad (22)$$

$$\kappa_t = \frac{8\pi}{3} \int_0^{\nu_t^*} \frac{1}{2\alpha_t} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\nu^2}{w_t \nu_t} g(\nu) \right] d\nu, \quad (23)$$

where κ_l and κ_t represent thermal conductivities due to the longitudinal and the transverse waves, respectively,

$$\kappa_l = \frac{k}{3 v_0} Q(\nu_1^*, 2\pi \tau_1, 2\pi \tau_1^{(1)}), \quad (22a)$$

$$Q(\nu_1^*, p, q) = \int_0^{\nu_1^*} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \left[1 - 2 \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{p^2 \nu^2}{G} - \frac{8}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{q^2 \nu^2}{H} + \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{p^4 \nu^4}{G^2} + \frac{4}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{q^4 \nu^4}{H^2} \right] \right\} d\nu$$

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{k_0} \frac{p}{G} + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{k_0} \frac{q}{H}$$

with

$$G = 1 + (p\nu)^2 \quad \text{and} \quad H = 1 + (q\nu)^2;$$

$$\kappa_t = \frac{k \sqrt{\pi} \tau_1^{(1)}}{3 v_{t\infty}} \int_0^{\nu_t^*} \nu^{1/2} (\sqrt{H} + 2\pi \tau_1^{(1)} \nu)^{1/2} \times \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{T (\sqrt{H} + 2\pi \tau_1^{(1)} \nu)^2}{2\pi \tau_1^{(1)} \sqrt{H}} \right] d\nu \quad (23a)$$

and

$$v_{t\infty} = \sqrt{\mu_1 / \rho}.$$

If we consider the limiting case

$$\nu \tau_1^{(1)} \ll 1,$$

which means that the effect of shearing viscosity predominates in the medium, the expression (23a) reduces to

$$\kappa_t = \frac{k}{q \sqrt{\pi}} \sqrt{\rho \mu_1'} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{T}{\mu_1'} \right) \nu_t^{*3/2}, \quad (23b)$$

with shearing viscosity $\mu_1' = \mu_1 \tau_1^{(1)}$. This expression (23b) corresponds to the expression of thermal conductivity at elevated temperatures presented

by LUCAS. In addition we can see that as an approximation for small $\tau_1^{(1)} \nu_t^*$, κ_t is roughly equal to eq. (23b) times $[1 + O(\tau_1^{(1)} \nu_t^*)]$. Thus the term $O(\tau_1^{(1)} \nu_t^*)$ shows the order of magnitude of shearing relaxation for liquids in the expression of κ_t .

The effect of the relaxation times on the internal energy appears in the angular brackets in the expressions (15) and (17). These terms show the deviation of the internal energy from that of a solid body.

For ordinary liquids, we can take $\mu_1' = 10^{-2}$ poises, $\tau_1 = 10^{-8} \dots 10^{-10}$ s, $\tau_1^{(1)} = 10^{-10} \dots 10^{-11}$ s, $\nu_1^* = 10^{13}$ s⁻¹, and $\nu_t^* = 10^{13}$ s⁻¹. Accordingly, we obtain $\tau \nu^* = 10^2 \dots 10^5$. This figure shows that the terms $(\tau \nu^*)$ hardly contribute to the angular brackets in the expressions of internal energy, eqs. (15) and (17). And the expression (15) is almost equal to eq. (16), which includes partial elastic moduli λ_1 and μ_1 . For some solutions of high-polymeric substance, it happens sometimes that $\tau_1^{(1)}$ is of order of magnitude $10^{-7} \dots 10^{-8}$ s, and

$(\tau_1^{(1)} \nu_t^*)$ reaches $10^5 \dots 10^6$. In this case, the expression (17) does not differ practically from eq. (18). Thus, we can see that the calculation of specific heat after DEBYE and LUCAS is also valid even for many kinds of liquids with relaxation phenomena.

In concluding the paper, the author wishes to express his sincere thanks to Prof. Dr. J. MEIXNER for valuable discussions. His acknowledgements are also due to the Alexander von Humboldt-Stiftung, which has enabled him to carry out this work during his stay in the Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen, Germany.

(Received March 25th, 1959.)

Notations

| | |
|---------|---|
| x_i | rectangular coordinates ($i=1, 2, 3$), |
| ξ_i | components of displacement ($i=1, 2, 3$), |
| T | temperature, |
| p_0 | initial pressure, |
| ρ | density in static state, |

| | |
|--|---|
| k_0 | static bulk modulus, |
| λ_r and μ_r | partial compressional and shearing regities, |
| $\lambda_r' = \lambda_r \tau_r$ | partial volume viscosities, |
| $\mu_r' = \mu_r \tau_r^{(1)}$ | partial shearing viscosities, |
| κ | thermal conductivity, |
| C_v | static specific heat at constant volume, |
| $\tau_r, \tau_r^{(1)}$ | relaxation times, |
| $D = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ | partial differential operator with res- pect to time, |
| $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$ | components of strain tensor ($i, j = 1, 2, 3$), |
| $\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$ | components of rotation of displacement ($i, j = 1, 2, 3$), |
| A_{ij} | components of stress tensor A |
| $E(i\omega, \tau)$ | complex elastic compliance, |
| E_0 | elasticity moduli, |
| v_l | propagation velocity of longitudinal wave, |
| v_t | propagation velocity of transverse wave, |
| $\omega = 2\pi\nu$ | circular frequency, |
| ν_l^* | DEBYE maximum frequency of longitu- dinal wave, |
| ν_t^* | DEBYE maximum frequency of trans- verse wave, |
| $g(\nu)$ | weight function for frequency ν , |
| N | Loschmidt number, |
| M | volume per gram molecule, |

| | |
|--|--|
| F | energy per unit volume, |
| k | Boltzmann constant, |
| \tilde{u}^* | activation energy, |
| $\bar{w} = d\nu/d(\nu/v)$ | group velocity of waves, |
| α | amplitude absorption coefficient of wave (per unit length), |
| $v_0 = \sqrt{k_0/\rho}, v_{t\infty} = \sqrt{\mu_1/\rho}, \text{ and } A = \left(\frac{3N}{4\pi M} \right)^{1/3}.$ | |

As usual in the tensorial notations, one should sum up over repeated indices.

All quantities corresponding to the longitudinal and the transverse waves, shall be denoted by the suffixes l and t , respectively.

References

- [1] DEBYE, P., Ann. Phys. (Lpz.) **39** [1912], 789.
- [2] LUCAS, R., J. Phys. Radium **8** [1937], 41; 410; **10** [1939], 60.
- [3] BRILLOUIN, L., J. Phys. Radium **7** [1936], 153.
- [4] OOMORI, K., Memoirs of Faculty of Engineering, Kyûsû Univ. **16** [1941], 20; 47.
- [5] FRENKEL, J. and OBRATZOV, J., J. exp. theor. Phys. U.S.S.R. **9** [1939], 1081; J. Phys. U.S.S.R. **2** [1940], 131.
- [6] OSHIDA, I., Mem. Fac. Engrg., Nagoya Univ. **2** [1950], 29; Proc. Phys. Math. Soc. Japan **23** [1941], 16.
- [7] SIPS, R., J. Polymer Sci. **7** [1951], 191.
- [8] TAKIZAWA, É. I., Mem. Fac. Engrg., Nagoya Univ. **5** [1953], 1.
- [9] MEIXNER, J., Z. Naturforschg. **9a** [1954], 654.
- [10] GLASSTONE, S., LADLER, K. J., and EYRING, H., The theory of rate processes. McGraw-Hill Book Co., New York 1941, p. 480.

Bookreview

J. R. PIERCE and E. E. DAVID, Jr., Man's world of sound. Doubleday and Co., New York 1958, 287 pages, 85 figures, 12 cm \times 21 cm, US-\$ 5.00.

This book summarises all the recent research in speech and hearing which concerns the science of human communication. Written by experts in the field of electronics and communications techniques, it covers the ground very thoroughly, as one would expect, and yet is very readable. In these days it is perhaps unnecessary to apologise to the layman for writing about frequencies, decibels and resonators but the fact that the authors do so by the time they have reached the third chapter shows that they are prepared to go far in the avoidance of technical jargon. This is not to say that the expert in acoustics can afford to dismiss the book. It contains

much that will probably be new to him put in a very refreshing style.

Physics, physiology and psychology—the three p's of the basis of human communication—are equally balanced in this text. The authors, though they do not habitually give sources, are evidently widely read and have well-sifted their information so that one can rarely "catch them out". (Only once in the reviewer's experience, where they quote the range of singing voices. There on page 64, the range of the tenor voice is given as 96 to 640 c/s! The reviewer as a choral tenor thinks himself very lucky to reach A, 440 c/s or as low as E 165 c/s.)

Not the least important part of the book are the final chapters on intelligibility and fidelity. In short, a welcome addition to the acoustical library.

E. G. RICHARDSON

SCHWINGUNGSFORMEN ZYLINDRISCHER SCHEIBEN AUS BARIUMTITANATKERAMIK

von G. SCHMIDT und L. KUTSCHABSKY

Institut für experimentelle Physik der Universität Halle

Zusammenfassung

Mit einer Kapazitätssonde wurden die axialen Bewegungen der Oberfläche zylindrischer Scheiben aus Bariumtitanatkeramik untersucht, um die Schwingungsformen der wichtigsten Resonanzstellen in der Umgebung der Dickenschwingung zu bestimmen. Das Verhältnis von Durchmesser zu Dicke ($2r/d$) der Proben lag zwischen 4 und 25,9. Nach einer Beschreibung der Meßanordnung folgt die Zusammenstellung der beobachteten Amplitudenverteilungen. In keinem Fall wurde eine Resonanzstelle mit annähernd „kolbenförmiger“ Schwingungsform beobachtet, wie es bei einer unendlich ausgedehnten Platte zu erwarten wäre.

Summary

The axial movement of the surfaces of cylindrical discs of BaTiO₃ ceramic were investigated, using a capacitance probe, in order to determine the mode of vibration at important resonance positions in the neighbourhood of the thickness mode. The ratio of diameter to thickness of the probe lay between 4 and 25.9. After describing the method the observed amplitude fields are displayed. In no case was a resonance with nearly piston-form vibration (as would be expected in an infinite plate) observed.

Sommaire

En utilisant une sonde à capacité on a étudié les mouvements suivant la direction de l'axe de la surface extérieure de disques circulaires de céramiques de titanate de baryum, afin de déterminer les formes de vibrations pour les résonances les plus importantes dans le voisinage de la vibration suivant l'épaisseur. Le rapport du diamètre à l'épaisseur ($2r/d$) des disques variait de 4 à 25,9. On décrit le dispositif de mesures et indique les répartitions d'amplitude observées. On n'a jamais observé une résonance donnant approximativement une forme de vibration telle que celle de la «membrane piston», forme que l'on pourrait attendre dans le cas d'une plaque indéfiniment étendue.

1. Einleitung

Viele Ultraschallgeräte enthalten als elektromechanische Wandler zylindrische Scheiben aus Bariumtitanatkeramik. Sie sind in Richtung ihrer Achse polarisiert und sollen unter der Einwirkung eines elektrischen Wechselfeldes geeigneter Frequenz in derselben Richtung „Dickenschwingungen“ ausführen. Darunter stellte man sich zunächst eine kolbenförmige Bewegung des ebenen Teiles der Oberfläche vor, ohne daß diese dabei eine Deformation erleidet. Für eine unendlich große Scheibe ist dies nämlich die einzige denkbare Schwingungsform, und man nahm an, daß sie bei endlichen Abmessungen ähnlich sein müßte, wenn nur der Durchmesser groß gegenüber der Dicke ist. In diesem Fall beobachtet man aber niemals eine einzige isolierte Resonanzstelle, welche dieser Schwingungsform entsprechen würde, sondern es lassen sich in dem in Frage kommenden Frequenzbereich mehrere Eigenschwingungen anregen. Diese Tatsache wies schon lange darauf hin, daß die Verhältnisse bei endlichen Abmessungen komplizierter sein müssen. Trotzdem wurde bei theoretischen Untersuchungen vielfach angenom-

men, daß die Amplitude auf der Oberfläche der Scheibe konstant ist. Zum Beispiel liegt diese Voraussetzung den meisten Berechnungen des elektrischen Ersatzschaltbildes des Dickenschwingers zugrunde.

Die ersten direkten Bestimmungen der Schwingungsformen von Bariumtitanatscheiben führte SHAW [1] mit einem optischen Interferometer aus. Er verwendete dazu „dicke“ Proben, bei denen das Verhältnis von Durchmesser zu Dicke ($2r/d$) zwischen 1 und 6,63 lag. Seine Ergebnisse zeigen, daß den elektrischen Resonanzstellen, die sich durch Impedanzänderungen bemerkbar machen, solche Schwingungen entsprechen, die bezüglich der Mittelebene und der Achse symmetrisch sind. Ihre Form hängt nicht von den absoluten Abmessungen ab, sondern nur von $2r/d$. Die Amplitude führt längs eines Radius sehr starke Schwankungen aus und wird dabei in vielen Fällen sogar negativ, d. h. es gibt ringförmige Gebiete, die zu den übrigen mit einer Phasenverschiebung von 180° schwingen. Es blieb die Frage offen, ob die Amplitudenschwankungen mit zunehmenden $2r/d$ kleiner werden.

Die Ergebnisse von SHAW bestätigten theoretische Untersuchungen von AGGARWAL [2] und AGGARWAL

und SHAW [3] über die Frequenzen und für einige Fälle über die Formen der axialsymmetrischen Eigenschwingungen isotroper und dämpfungsfreier zylindrischer Scheiben. Danach läßt sich die Amplitudenverteilung längs eines Radius näherungsweise als Summe dreier Besselfunktionen darstellen, wobei die elastischen Randbedingungen außer auf dem ebenen Teil der Oberfläche auf drei Linien des zylindrischen Teiles erfüllt sind, nämlich auf den Kanten und der Mittellinie. Diesen Ergebnissen zufolge sollten die Schwingungsformen auch bei beliebig großem $2r/d$ -Verhältnis nicht gleichförmiger werden, vorausgesetzt, daß sich die Dämpfung nicht auswirken beginnt.

Kurz nach Abschluß der hier beschriebenen Versuche wurde eine weitere Arbeit zu diesem Problem bekannt. ARNOLD und MARTNER [4] untersuchten die Bewegung von Oberflächenpunkten schwingender Bariumtitanatscheiben mit einem Schwingungsaufnehmer, der gleichzeitig zwei orthogonale Komponenten zu messen erlaubt. Damit konnten sie also nicht nur die axiale Komponente der Schwingung, sondern auch die radiale oder die tangentialen nach Betrag und Phase messen und auf dem Leuchtschirm eines Kathodenstrahloszillographen aufschreiben. Die sich auf diese Weise ergebenden Kurven sind im allgemeinen Ellipsen, die in einigen Fällen in Gerade übergehen. Reine Knoten ohne jede Bewegung sind kaum zu beobachten, weil die Minima der axialen Komponente nicht mit denen der radialen zusammenfallen. Tangentiale Bewegungen wurden nur selten beobachtet. Die Abhängigkeit der Amplitudenverteilung vom Durchmesser-Dicken-Verhältnis ist nur für die tiefste (radiale) Eigenschwingung angegeben.

Das Ziel der hier beschriebenen Versuche war die experimentelle Bestimmung der Schwingungsformen zylindrischer Bariumtitanatscheiben mit solchen Abmessungen, die bei der Anwendung als elektromechanische Wandler in Frage kommen. Dabei sollte es sich zeigen, ob mit zunehmenden Werten von $2r/d$ die radialen Amplitudenschwankungen abnehmen, oder ob es wenigstens besonders günstige Abmessungen für einen Dickenschwinger gibt. Entsprechend dieser Zielsetzung wurden nur jeweils die axialen Komponenten der Amplituden bei solchen Resonanzstellen bestimmt, die elektrisch deutlich nachweisbar waren und deren Frequenzen in der Umgebung der vermuteten Dickenschwingung lagen.

2. Meßanordnung

Unter den für Schwingungsmessungen bekannten Geräten erschien für den vorliegenden Zweck eine Kapazitätssonde aus folgenden Gründen als vorteil-

haft: Die Messung beeinflusst den zu untersuchenden Vorgang nicht, für die Oberfläche der Probe ist keine besondere Vorbehandlung erforderlich — wie etwa bei einem optischen Verfahren —, und wegen der Empfindlichkeit dieser Methode sind nur verhältnismäßig kleine Amplituden in der Größenordnung 10^{-9} m erforderlich, so daß die Schwingungen praktisch keine Erwärmung verursachen. Als Nachteile dieses Verfahrens sind hauptsächlich die folgenden zu erwähnen: Die Messung erfolgt punktweise und liefert jeweils einen Mittelwert der Amplituden über ein Gebiet, dessen Größe etwa demjenigen der Sondenstirnfläche entspricht.

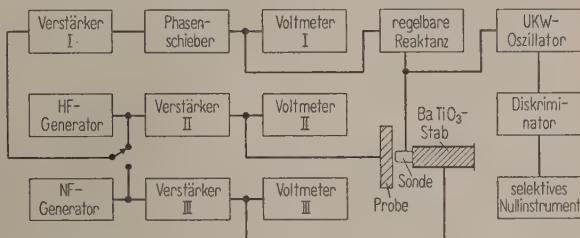


Bild 1. Blockdiagramm der Meßanordnung.

Die Wirkungsweise des Gerätes, das in einigen wesentlichen Punkten dem von SHARAF [5] beschriebenen entspricht, zeigt das Blockdiagramm in Bild 1. Eine Spannung vom HF-Generator regt über den Verstärker II die Probe zu einer Eigenschwingung an. Die axiale Komponente der Oberflächenbewegung verändert die Kapazität der Sonde, die an den frequenzbestimmenden Schwingkreis des UKW-Oszillators angeschlossen ist. Die Schwingung der Probe erzeugt somit eine Frequenzmodulation, die mit einem Diskriminator und einem selektiven Nullinstrument — einem auf die Frequenz des HF-Generators abgestimmten Überlagerungsempfänger — nachgewiesen wird. Die Amplitudenmessung besteht in der Kompensation dieser Kapazitätsänderungen durch eine regelbare Reaktanz. Ihre Steuerung erfolgt ebenfalls mit einer Spannung vom HF-Generator, die mit dem Verstärker I und dem Phasenschieber entsprechend eingestellt werden kann. Ihre Größe, die das Voltmeter I anzeigt, ist der gesuchten Amplitude proportional. Um das Verhältnis dieser beiden Werte, also die Empfindlichkeit des Gerätes, bestimmen zu können, lassen sich mit Hilfe des Bariumtitanatstabes bei ruhender Probe Abstandsänderungen erzeugen, die aus dem genau bestimmten Piezomodul d_{31} und der anregenden NF-Spannung zu berechnen sind. Dabei muß die Frequenz so tief sein, daß noch keine Resonanzerscheinungen auftreten können. (Es wurden Frequenzen zwischen 70 und 80 Hz benutzt.) Die Kompensation erfolgt ganz entsprechend, nur dient hierbei ein Vibrationsgalvanometer als Nullinstrument. Eine

derartige Bestimmung der Empfindlichkeit müßte grundsätzlich nach jeder neuen Einstellung der Sonde erfolgen. Es genügte aber im allgemeinen, ihren Abstand vor jeder Messung so einzustellen, daß die Trägerfrequenz des Oszillators konstant blieb. Mit einem Nullinstrument am Diskriminator läßt sich dieser Abgleich sehr genau durchführen. Dabei müssen allerdings die Oberflächen von Sonde und Probe einander hinreichend parallel sein.

Der Schwinger wird zwischen drei Spitzen auf der Mittellinie seiner zylindrischen Oberfläche eingeklemmt. Wie entsprechende Versuche zeigten, ist aber die Halterung nicht kritisch. Selbst wenn die Befestigungspunkte sehr weit von der Symmetrieebene entfernt waren, änderte sich die beobachtete Amplitudenverteilung nur unbedeutend. Die Einspannvorrichtung ist an einem Reiter einer optischen Bank so befestigt, daß die Probe um ihre waagerechte Symmetrieachse gedreht und senkrecht dazu längs eines Durchmessers an der Sonde vorbeigeführt werden kann. Auf einem zweiten Reiter befindet sich zusammen mit dem Oszillator, dem Diskriminator und der Reaktanzröhre die Kapazitätssonde. Sie läßt sich mittels einer Mikrometerschraube und eines Hebels in ihrer Längsrichtung verschieben, so daß man ihren Abstand zur Schwingeroberfläche, der in der Größenordnung 10^{-5} m liegen muß, mit der erforderlichen Genauigkeit einstellen kann. Die Stirnfläche der Sonde ist rechteckig und hat die Abmessungen $0,7 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$. Die Schmalseite liegt bei der Messung parallel zu einem Radius, weil in dieser Richtung die stärksten Amplitudenschwankungen auftreten. Damit soll der Fehler infolge der endlichen Sondenoberfläche, die nur einen Mittelwert der Amplitude über einen entsprechenden Teil der Probenoberfläche zu bestimmen erlaubt, möglichst klein gehalten werden. Insgesamt beträgt die Meßgenauigkeit im Durchschnitt etwa 10%.

3. Amplitudenmessungen

Um eine Eigenschwingung der Probe anzuregen, wurde die Frequenz des HF-Generators auf kleinste elektrische Impedanz, also annähernd auf Serienresonanz abgestimmt. Bei dieser Einstellung ist die Amplitude an einer beliebigen Stelle der Probe bei konstanter HF-Spannung am größten. Da kleine Frequenzänderungen (bis etwa 0,2%) die Schwingungsform im allgemeinen nicht wesentlich beeinflussen, kann man aus der Abhängigkeit der Amplitude von der Verstimmung den Gütefaktor bestimmen. Wie einige Versuche zeigten, liefert diese Methode dieselben Werte wie elektrische Messungen. — ARNOLD und MARTNER [4] fanden die größten mechanischen Amplituden bei Frequenzen jeweils zwischen Serien- und Parallelresonanz. Sie machten aber keine Angaben über die Anregungsbedingungen.

Für die Versuche standen Schwinger zur Verfügung, bei denen das Verhältnis Durchmesser zu Dicke zwischen 6 und 25,9 lag. Zur Untersuchung der Schwingungsform wurde die Amplitude bei konstanter Anregungsspannung längs eines Radius in genügend kleinen Intervallen bestimmt. Wie derartige Messungen längs verschiedener Radien bei ein und derselben Probe zeigten, war die Amplitudenverteilung in vielen Fällen nicht vollständig axialsymmetrisch. Das ist wahrscheinlich auf ungenügende Homogenität der Keramik zurückzuführen.

Zur systematischen Untersuchung der Abhängigkeit der Schwingungsform vom Verhältnis $2r/d$ wurde eine Bariumtitanatscheibe herausgesucht, die annähernd symmetrisch schwang. Ihr Gütefaktor war mit 710 verhältnismäßig hoch. Ihre Dicke betrug 2,9 mm, der Durchmesser zu Beginn 39 mm. Jeweils nach der Bestimmung der Amplitudenverteilung längs eines markierten Radius bei den wichtigsten Resonanzstellen in der Nähe der Dickenresonanz wurde der Radius in Stufen von etwa 0,2 mm abgeschliffen, bis der ursprüngliche Wert des Verhältnisses $2r/d$ von 13,4 bis auf 4 abgenommen hatte. Zur Anregung waren Spannungen von einigen 10^{-1} V erforderlich, um gut meßbare Amplituden bis 10^{-8} m zu erhalten. Innerhalb der Meßgenauigkeit waren diese der Anregungsspannung proportional.

4. Ergebnisse

Zunächst zeigten auch diese Versuche, daß die Schwingungsformen bezüglich der Mittelebene der Probe symmetrisch sind, wenn die betreffenden Resonanzstellen auch elektrisch deutlich in Erscheinung treten, und daß die Amplitudenverteilungen nur vom Verhältnis $2r/d$, nicht aber von den absoluten Abmessungen abhängen. Bei keiner der untersuchten Resonanzstellen erwies sich die Schwingungsform als annähernd kolbenförmig. Man kann nicht einmal feststellen, daß mit zunehmendem Verhältnis von Durchmesser zu Dicke die Amplitudenverteilung gleichförmiger wird. Es treten vielmehr ganz ähnliche Schwankungen längs eines Radius auf, wie sie SHAW [1] bei dickeren Scheiben gefunden hat, nur wird ihre Zahl entsprechend dem Wert von $2r/d$ größer. Bild 2a bis e soll dies zeigen. Hier sind die Amplituden A , bezogen auf eine Anregungsspannung von 0,4 V, als Funktion des Abstandes vom Schwingermittelpunkt r für je eine Resonanzstelle bei den angegebenen Abmessungen aufgetragen. (Die Dicke der Scheiben beträgt in allen Fällen 2,9 mm.) Es ist deutlich zu erkennen, daß im allgemeinen die Zahl der Amplitudenmaxima und -minima entsprechend dem Radius zunimmt. Eine Schwingungsform wie in Bild 2c kommt nur ausnahmsweise vor (bei Verkleinerung des Durchmes-

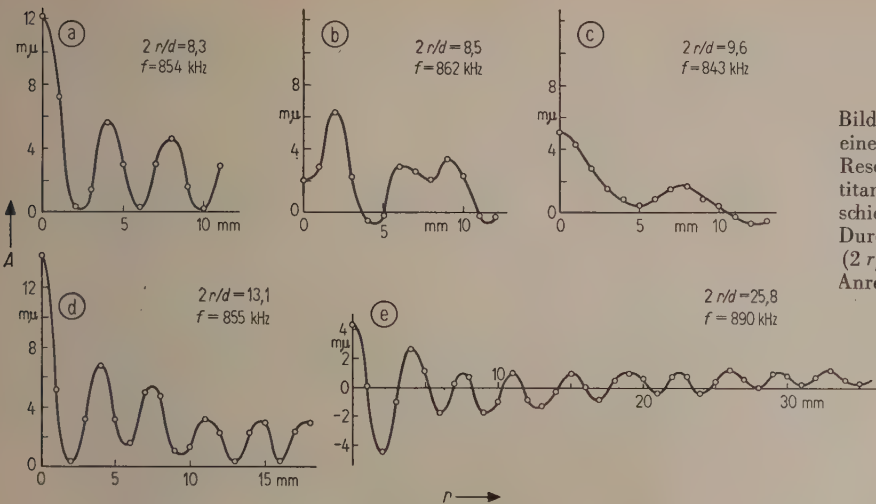


Bild 2. Amplitude A längs eines Radius r bei je einer Resonanzstelle von Bariumtitanatschwingern mit verschiedenem Verhältnis von Durchmesser zu Dicke ($2r/d$) (Dicke 2,9 mm, Anregungsspannung 0,4 V).

sers geht sie in die des Bildes 2 b über). In den meisten Fällen gibt es Gebiete, die gegenüber den anderen mit einer Phasenverschiebung von 180° schwingen. Diese sind durch eine negative Amplitude gekennzeichnet. Nur bei wenigen Abmessungen gibt es Resonanzstellen, bei denen das nicht vorkommt. Sie zeichnen sich meist zusätzlich durch verhältnismäßig große Amplituden aus. Bild 2 a und d zeigt hierfür zwei Beispiele.

Die Bilder 3 und 4 geben einen Überblick über diejenigen Schwingungsformen, die beim stufenweisen Abschleifen des Schwingers mit einem ursprünglichen Durchmesser von 39 mm und einer Dicke von 2,9 mm beobachtet wurden. Auch hier sind die Amplituden, bezogen auf gleiche Anregungsspannung, längs eines Radius angegeben, wobei dieser aus räumlichen Gründen nach links aufgetragen worden ist. Der Ursprung jedes dieser Achsenkreuze gibt in einem weiteren Koordinatensystem das $2r/d$ -Verhältnis und die Frequenz der betreffenden Resonanzstelle an. Letztere gilt nur für eine Dicke von 2,9 mm. (Eine einheitliche Normierung der Resonanzfrequenzen hat sich anscheinend noch nicht durchgesetzt. Während SHAW die sogenannte Frequenzkonstante fd benutzt, wobei f die Frequenz in kHz und d die Dicke in mm bedeuten, beziehen ARNOLD und MARTNER [4] ihre Frequenzen auf die tiefste Eigenschwingung der betreffenden Probe.) Aus dieser Zusammenstellung lassen sich einige Tatsachen erkennen, die zum Teil den in [3] und [4] für andere Abmessungen angegebenen entsprechen: Für jedes $2r/d$ gibt es mehrere Resonanzstellen, von denen einige etwa gleich stark ausgeprägt sind. Dasselbe gilt auch für die Kopplungsfaktoren, wie entsprechende Messungen zeigten, die für einige Abmessungen neben den Amplitudenmessungen durchgeführt worden sind. Mit abnehmendem Durchmes-

ser verschieben sich die Resonanzfrequenzen nach höheren Werten, wobei sich sowohl die Schwingungsform als auch der Kopplungsfaktor verändert.

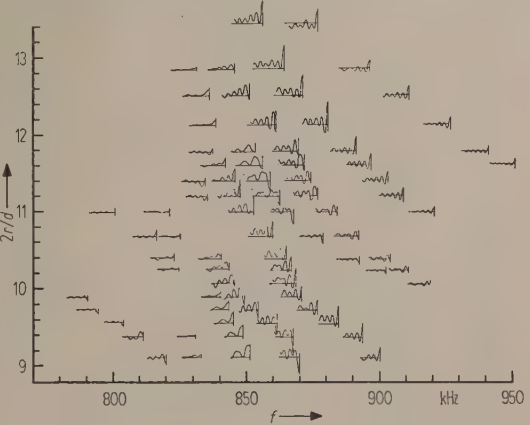


Bild 3. Zusammenstellung der untersuchten Amplitudenverteilungen von Proben mit $2r/d$ -Verhältnissen zwischen 9 und 13,4.

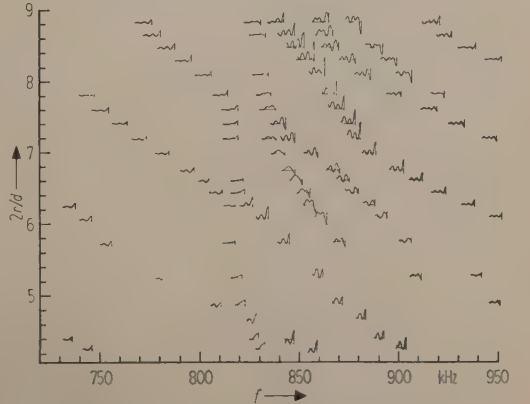


Bild 4. Wie Bild 3, $2r/d$ zwischen 4,2 und 8,8.

Dieser ist näherungsweise der über die Schwingeroberfläche gemittelten Amplitude proportional.

Von $2r/d=6,6$ an abwärts stimmen die Amplitudenverteilungen des Bildes 4 qualitativ mit den von SHAW gezeigten überein. Die bei $2r/d \approx 6$ gezeichneten Kurven entsprechen (von links nach rechts) den von ihm mit den „mode numbers“ 5 bis 10 bezeichneten Schwingungsformen.

Einige $2r/d$ -Verhältnisse — nämlich die bei 12,8; 10,6; 7,8 und 5,2 — zeichnen sich dadurch aus, daß sie im untersuchten Frequenzbereich eine Resonanzstelle besitzen, die im Verhältnis zu den benachbarten besonders stark ausgeprägt ist. Die Frequenzen dieser Resonanzstellen liegen alle bei 860 kHz, was einer Frequenzkonstante von etwa 2500 kHz·mm entspricht. Das ist ungefähr der Wert, der sich für die Dickenschwingung einer unendlich großen Scheibe ergäbe. Die zugehörigen Schwingungsformen entsprechen gleichzeitig der in Bild 2 a und d gezeigten Art, bei der alle Punkte der Schwingeroberfläche mit gleicher Phase schwingen. Vielleicht sind diese Werte von $2r/d$ besonders günstig für Bariumtitanatscheiben, die als Dickenschwinger verwendet werden sollen. ($2r/d=5,2$

wurde bereits von SHAW empfohlen.) Es kann aber noch nicht gesagt werden, welchen Einfluß die Halterung des Wandlers und die Dämpfung durch das angekoppelte Medium auf die Schwingungsform ausüben.

Wir danken Herrn Professor Dr. W. MESSERSCHMIDT für seine Unterstützung bei der Arbeit und Herrn Dipl.-Phys. R. MILLNER für wertvolle Hinweise. Einen Teil des Meßgerätes hat Herr Dipl.-Phys. H. R. WALDT im Rahmen seiner Diplomarbeit aufgebaut.

Das Staatssekretariat für Hochschulwesen stellte in dankenswerter Weise die Mittel für diese Arbeit zur Verfügung.

(Eingegangen am 6. Juli 1959.)

Schrifttum

- [1] SHAW, E. A. G., J. acoust. Soc. Amer. **28** [1956], 38.
- [2] AGGARWAL, R. R., J. acoust. Soc. Amer. **24** [1952], 463; 663; **25** [1953], 533.
- [3] AGGARWAL, R. R. und SHAW, E. A. G., J. acoust. Soc. Amer. **26** [1954], 341.
- [4] ARNOLD, J. S. und MARTNER, J. G., J. acoust. Soc. Amer. **31** [1959], 217.
- [5] SHARAF, H. M., Electronics **27** [1954], Nr. 6, 172.

Buchbesprechung

O. ZINKE und H. BRUNSWIG, *Hochfrequenz-Meßtechnik*, 3. Aufl. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1959, XV, 234 Seiten, 258 Bilder, 16 cm × 23,5 cm, Ganzleinen DM 24,80.

Das Buch, das 1937 in erster Auflage erschienen ist, wurde in der 3. Auflage stark erweitert. Es umfaßt jetzt die Kapitel:

1. Meßsender,
2. Strommessung,
3. Spannungsmessung,
4. Leistungsmessung,
5. Impedanzmessungen, insbesondere an Widerständen, Kondensatoren und Spulen,
6. Messung des Phasenwinkels,
7. Messungen an Vierpolen, insbesondere an Leitungen und Kabeln,
8. Messungen an Antennen,
9. Frequenzmessung und Frequenzüberwachung,
10. Bestimmung von Kurvenform bzw. Frequenzspektrum; Oszillographen,
11. Messungen bei Modulation,
12. Messungen an Empfängern.

Jedes Kapitel wird ergänzt durch einen Überblick über die einschlägigen Meßgeräte, die auf dem deutschen oder internationalen Markt erhältlich sind. Diese Meßgeräte sind in Tabellen zusammengestellt und bilden zusammen einen besonderen Band, der unter dem Titel „Hochfrequenz-Meßgeräte“ von dem

gleichen Verlag herausgegeben wird (VIII, 50 Seiten, 16 cm × 23,5 cm, kartoniert DM 9,60).

In dem Hauptband ist die Darstellung bewußt so gewählt, daß „das Buch dem Studenten als Leitfaden und Ergänzung beim Studium der Hochfrequenztechnik dienen und dem Ingenieur eine Hilfe sein kann“. Um dieses Ziel zu erreichen, schicken die Verfasser der Beschreibung jeder einzelnen Messung eine Darlegung ihrer theoretischen Grundlagen voraus, die vielfach noch durch besondere schematische Darstellungen erläutert wird. Dabei gehen sie manchmal vielleicht etwas zu weit, wie etwa bei der Behandlung der Röhrgleichrichter und der Frequenzmodulation, aber im allgemeinen sind diese Vorbetrachtungen auf die kürzestmögliche Form gebracht und erleichtern das Verständnis der eigentlichen Meßvorschriften wesentlich.

Jedem Kapitel ist ein numeriertes Verzeichnis der einschlägigen Spezialarbeiten und Lehrbücher beigelegt, auf das im Text laufend hingewiesen wird. Dadurch erhält der Leser die Möglichkeit, Sonderfragen eingehender zu studieren. Ein ausführliches Stichwortverzeichnis mit Seitenzahlen erleichtert das Auffinden der Stellen, an denen bestimmte Probleme behandelt werden.

Insgesamt stellt die „Hochfrequenz-Meßtechnik“ — in Verbindung mit dem Zusatzband über die käuflichen Meßgeräte — ein ausgezeichnetes Handbuch dar, das allen denen aufs wärmste empfohlen werden kann, die Messungen auf dem Gebiet der Hochfrequenztechnik durchführen müssen.

F. KIRSCHSTEIN

A VOCODER FOR TRANSMITTING 10 kc/s SPEECH OVER A 3.5 kc/s CHANNEL

by M. R. SCHROEDER and E. E. DAVID, Jr.

Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N. J., U.S.A.

Summary

Application of vocoders to speech transmission has been frustrated in the past by two problems. First, a voiced-unvoiced decision and a determination of the voice pitch must be made in the vocoder analyzer. Second, though vocoder speech is quite intelligible, a good deal of the individuality of voices is lost. Recent research indicates that proper vocal excitation for the speech synthesizer can be obtained from a narrow bandwidth sample of the original speech. Voiced-unvoiced decision and pitch measurement are not required. Furthermore, the irregular fluctuations of consecutive voice periods which impart individuality to a voice are preserved by this method. Means for sending 10 kc/s quality speech over a 3.5 kc/s channel are discussed. A laboratory model of a vocoder incorporating a 3.2 kc/s uncoded baseband and six spectrum channels covering the band from 3.2 to 10 kc/s has been constructed. Formal listening tests, based on the method of confusion matrices, indicate a gain both in articulation and reproduction quality. Even more important, this approach appears to be applicable to vocoders generally. Recent research has shown that a few hundred c/s are sufficient for speech synthesis and that bandwidth compression by a factor between two and four is feasible for telephone-quality signals of 3–4 kc/s bandwidth.

Sommaire

L'application du «Vocoder» à la transmission de la parole a été retardée jusqu'à présent par deux obstacles principaux. Le premier est la décision touchant la présence ou l'absence de signaux vocaux et la détermination de la fréquence fondamentale de la voix. Le second est la perte de l'individualité des signaux parlés, bien que la parole transmise par le Vocoder soit très intelligible. Des recherches récentes ont indiqué que l'excitation vocale nécessaire à la synthèse pouvait être obtenue grâce à un échantillon de largeur de bande restreinte du signal original. En outre, les fluctuations irrégulières de la fréquence fondamentale, qui contribuent à l'individualité de la voix, sont préservées par cette méthode. L'article avait pour but d'étudier la possibilité de transmettre des signaux parlés de haute qualité à 10 kHz. Un modèle de laboratoire de ce Vocoder a été construit. Il comprend une «bande de base» non codée de 3,2 kHz et six canaux spectraux couvrant le domaine de 3,2 à 10 kHz. Des épreuves d'écoute, basées sur la méthode des «matrices de confusion», ont démontré une qualité supérieure de l'articulation et de la reproduction. Fait plus important, cette méthode est applicable en général à tout Vocoder. Des recherches récentes ont montré qu'une bande de quelques centaines de cycles était acceptable pour la synthèse de la parole et qu'une compression de fréquence dans le rapport de deux à quatre était possible même pour des signaux de qualité téléphonique d'une largeur de bande entre 3 et 4 kHz.

Zusammenfassung

Die praktische Anwendung des Vocoders auf Probleme der Sprachübertragung ist bisher durch zwei Hindernisse vereitelt worden. Erstens muß am Vocoder-Analysator eine stimmhaft-stimmlos Entscheidung getroffen und die Grundfrequenz der Sprache gemessen werden. Zweitens verliert die Vocoder-Sprache einen großen Teil ihrer Individualität, obwohl die Verständlichkeit recht gut ist. Neuere Untersuchungen haben ergeben, daß die für die Sprachsynthese erforderliche stimmhafte, stimmlose oder gemischte Anregung von einem schmalbandigen Ausschnitt der Originalsprache abgeleitet werden kann. Eine stimmhaft-stimmlos Entscheidung und Messung der Sprachgrundfrequenz sind nicht mehr erforderlich. Außerdem erhält diese Methode die unregelmäßigen Schwankungen aufeinanderfolgender Grundfrequenzperioden, die der Stimme Individualität verleihen. Das Ziel der Arbeit war, die Übertragung von 10-kHz-Sprache über ein 3,5 kHz breites Frequenzband zu ermöglichen. Das Versuchsmodell eines Vocoders mit einem 3,2 kHz breiten unkodierten „Grundband“ und sechs Spektralkanälen, die das Frequenzband von 3,2 kHz bis 10 kHz bestreichen, wurde angefertigt. Vergleichsmessungen mit einem etwa gleichbreiten unkodierten Sprachfrequenzband, die nach der Methode der „Konfusions-Matrizen“ durchgeführt wurden, zeigten einen Gewinn sowohl der Verständlichkeit als auch der Wiedergabequalität. Besonders wichtig ist jedoch, daß das hier beschriebene Prinzip ganz allgemein auf Vocoder angewandt werden kann. Kürzliche Untersuchungen haben erwiesen, daß ein wenige hundert Hertz breites Grundband zur Synthese erforderlich ist und daß eine Bandbreitenkompression zwischen 2 : 1 und 4 : 1 für Sprachsignale von Telephonqualität mit einer Bandbreite zwischen 3 und 4 kHz möglich ist.

1. Introduction

Since HOMER DUDLEY's [1], [2] enunciation of its principles some 30 years ago, the channel vocoder has been both a promise and a frustration to those interested in efficient speech transmission. A promise, because existing models demonstrated at least a 5-fold compression of the bandwidth required for transmission of articulate speech. A frustration, because two stubborn obstacles have stood in the path of its application. First, DUDLEY's concept requires at the analyzer-transmitter a voiced-unvoiced decision and, depending upon the outcome of this decision, a determination of the voice pitch. These data are ordinarily transmitted as a single parametric signal. To the present time, no satisfactory device to perform these functions on a variety of speech signals has been found. This problem is often called "the pitch problem." Second, though vocoder speech is quite intelligible, it can hardly be described as "sounding natural." A good deal of the individuality of voices is lost in the vocoder. This problem is often referred to as the "naturalness problem."

Results of recent research indicate that these problems no longer need preclude the vocoder from practical application. Briefly, it has been discovered that the proper vocal excitation can be obtained from a narrow bandwidth sample of the original speech. If such a sample is made available at the receiver-synthesizer, the need for voiced-unvoiced decision and pitch measurement is eliminated. Furthermore, the irregular fluctuations of consecutive voice periods¹, which contribute individuality to a

voice, are preserved by this method whereas these characteristics are lost in the usual parametric representation. One important aspect of the naturalness problem is thus solved.

This approach to voice coding was initiated by the research described in this paper. Our intention was to investigate the possibility of sending 10 kc/s quality speech over a 3.5 kc/s channel. This feat was to be accomplished by using a vocoder on the band from 3 to 10 kc/s while transmitting the band up to 3 kc/s without coding. Subsequent work which indicates the more general applicability of this principle will be described in a later publication.

The notion of attaining high quality speech using telephone bandwidth can be interpreted in at least two ways. First, it represents a considerable bandwidth compression, namely, a three-fold decrease (from 10 to 3.5 kc/s). Secondly, it may be considered as merely a more efficient utilization of an available channel. In either case, it involves an interesting exercise in the application of vocoder principles to speech energy above 3 kc/s. The application, as all vocoder applications, is based upon certain properties of speech and hearing [3]. These are:

1. Spectra of speech sounds above 3 kc/s, especially those of the fricatives, affricates, and stops which are the predominant variety above 3 kc/s, are rather broad. (The upper parts of Figs. 10 and 11 show spectrograms of /s/ and /ʃ/ (as in shoe), respectively, and illustrate this point well.)

2. The ear is not very sensitive to spectral modifications of these sounds. For example, it has been noted in earlier experiments that a broad resonance around 3 kc/s excited by noise, sounds respectably like a /ʃ/ in spite of the fact that this is a rather drastic simplification of the spectrum of a human-made /ʃ/ (see Fig. 11). Furthermore, the subjective /ʃ/ percept does not depend on the width of this resonance within wide limits. This means that the /ʃ/ can be adequately specified by a single parameter! The same is true for the /s/ which can be synthesized from a band of noise around 7 kc/s. Other fricatives require somewhat more complex synthesis but two bands of energy usually give a good approximation.

These characteristics of the speech-hearing link indicate a relatively low information rate above 3 kc/s and promise an effective use of voice coding. Indeed it appears that the band between 3 kc/s and 10 kc/s can be compressed into a few hundred c/s by using the channel-vocoder method. If this high-frequency band were specified by the frequencies of its spectral maxima, then compression to 200 c/s or less might be achieved. This latter method is akin

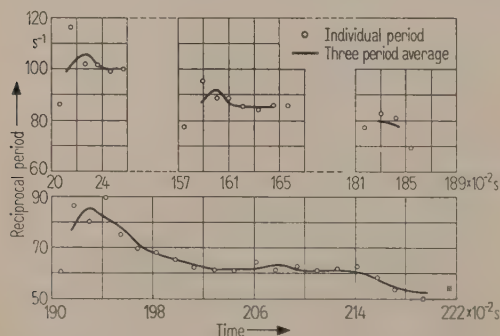


Fig. 1. Fluctuations of individual pitch periods.

¹ The magnitude of these fluctuations are indicated in Fig. 1, where for a single utterance of one speaker the reciprocal period length separating successive glottal puffs, along with the three-period average, is plotted as a function of time. Note that particularly at the onset and decay of voicing, significant irregularities are present. Obviously, a narrowband parametric representation will more nearly reproduce the three-period average. The period identifications for Fig. 1 were derived by eye from a high-definition oscillogram.

to the resonance vocoder concept [4], [5], [6] for vowels in the range below 3.5 kc/s.

These estimates take account of the fact that the transmission bandwidth of the coded transmission channels for the high frequencies must be greater than that of channels for lower frequencies. Experiments showed the necessity for 30 to 50 c/s channel bandwidths instead of the usual 15 or 25 c/s. The increase permits faithful reproduction of fast attacks such as are found in the plosives /t/ and /p/, and in the affricate /tʃ/ (as in church).

Even with this allowance, there is a considerable bandwidth compression of the speech components above 3 kc/s. For a channel-vocoder it amounts to approximately 20 : 1, and for a resonance vocoder the saving might be between 30 : 1 and 40 : 1. If the speech energy below 3 kc/s is sent in uncoded form, the effective compression for the whole frequency range is about 3 : 1 in either case. However, resonance vocoding requires fewer channels and might result in simpler terminal equipment.

The following material describes the development of a channel-vocoder version of a vocoder for high-quality speech in conformity with the principles stated above.

2. How the excitation problem was solved

At the beginning of this research, the pitch problem was the only major obstacle standing in the way of realizing a high quality vocoder. However, before work was begun, it was decided not to attempt to solve this problem as such. Anyone who has worked in the vocoder field will instantly recognize this decision as a sound one. Instead it was planned to seek ways to avoid or by-pass the problem, at least in its classical form. Below are enumerated the various attempts in the order they were investigated and discarded (with the exception of the last scheme).

2.1. Initially, the necessity for periodic (voiced) excitation was neglected entirely by providing *a*periodic excitation during synthesis of *a*ll sounds. This proposal is not new. MEYER-EPPLER and ENKEL [7] obtained a patent on what is substantially a one-channel vocoder with continuous and exclusive noise excitation for frequencies above 5000 or 6000 c/s. As expected, the experimental vocoder excited in this manner produced fine unvoiced sounds but protested audibly with a reptile-like background hiss during the occurrence of some vowels, notably /a/ (as in father) and /i/ (as in eve). Obviously, the vocoder had to be silenced during the occurrence of such sounds which have audible energies above 3 kc/s. This is the subject of the next paragraph.

2.2. In a first model of the "switched" vocoder, the energy source was switched on only when an

unvoiced sound appeared at the vocoder input. This scheme is illustrated in block diagram form in Fig. 2. It resulted in audible transients at the switching times.

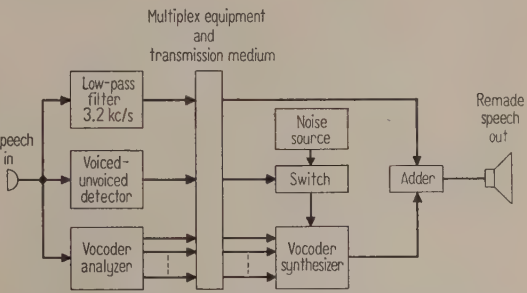


Fig. 2. Vocoder for unvoiced speech sounds. The noise source is switched on when the voiced-unvoiced detector indicates an unvoiced sound.

2.3. In a third model the input speech to the vocoder analyzer was switched (see Fig. 3). Thus, the low-pass filters for the channel signals provided a smooth transition between the two states and eliminated the transient. However, the switching itself was unreliable. During some weak fricatives, notably the /f/ in connected speech, the vocoder failed to turn on, thus missing part of its chance to improve the speech. Therefore, the switching function was modified in a further model.

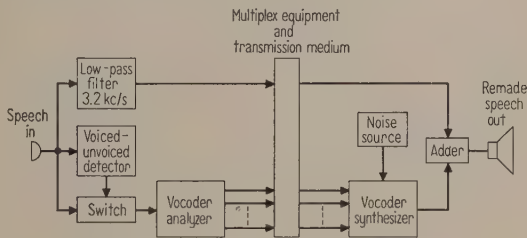


Fig. 3. Vocoder for unvoiced speech sounds. The speech signal supplied to the vocoder analyzer is switched off during purely voiced sounds.

2.4. In this model the speech was ordinarily connected to the vocoder but disconnected during the occurrence of a voiced sound. For the switching logic, the "maximum likelihood" [8] principle was used. This scheme gave near perfect results; for if the switch would not respond (as might happen during a very weak-voiced sound), it did not matter since the sound would also be too weak to produce an objectionable output. Here, finally, the right switching mode had been found and the resulting vocoder was generally judged as pleasing. It improved speech quality and intelligibility. The vocoder at this state was clearly the best that could be realized with *synthesis from noise alone*.

However, after a few weeks of listening experience it became clear that the addition of voiced excitation would add measurably to the reproduction quality. While the voiceless speech sounds profited greatly in the switched arrangement, most of the vowels were noticeably lower in quality. Thus, further models which included both voiced and unvoiced excitation were developed. This work is described in the following paragraphs.

2.5. In spite of the general decision not to attempt pitch detection, the pitch source from an existing 16-channel vocoder was connected to the wideband vocoder to determine its effects. The result was not disappointing because no positive results were expected. However, a number of interesting negative conclusions could be drawn from the brief experiment.

a) With telephone quality speech, pitch detection was entirely unsatisfactory. This was known beforehand.

b) Even with a high-quality microphone, such as would presumably be used in connection with a wideband vocoder, pitch detection was by no means accurate enough. Evidently, when vocoded and uncoded speech bands are combined, the components of the synthesized speech must be coherent with those of the uncoded speech, not just lie within given tolerance limits. The absolute pitch detection required for this purpose is something much more difficult to achieve than ordinary finite-tolerance pitch detection.

Thus, it appears that the pitch problem for a vocoder that is to be used together with uncoded speech is even more complex than in ordinary vocoders. No solution of this problem by conventional pitch detection is yet at hand.

Realization of these formidable difficulties led to a re-examination of the whole excitation problem, which conventionally requires voiced-unvoiced decision and pitch detection at the transmitter, and synthesis from local pulse and noise generators at the receiver. During this study, it became clear that the uncoded speech itself (a band of which is available to the receiver-synthesizer in this vocoder) might be transformed to provide the proper excitation for synthesis. The uncoded speech (covering frequencies from, say, 80 to 3200 c/s) has a short-time power spectrum, either continuous (unvoiced) or of the quasi-discrete type (voiced), shaped by the talker to impart his intended "sound color" or phonetic value. Speech synthesis by vocoder requires a flat spectrum of constant power density and of the proper type (discrete or continuous). This transformation from the shaped and band-limited spectrum of the uncoded speech band to a flat wideband spectrum of the proper type for synthesis be-

tween 3 and 10 kc/s can be achieved by an appropriate combination of nonlinear distortion and instantaneous automatic gain control. Such nonlinear techniques are described in the following paragraphs.

2.6. The first distortion schemes employed either infinite clipping or half-wave or full-wave rectification with or without saturation. However, none of these distortions were adequate to generate, from speech components below 3 kc/s, spectra sufficiently flat between 3 kc/s and 10 kc/s.

For many waveforms the rate of zero crossings is a good measure of their spectral spread. None of the distortion methods investigated initially increased the rate of zero crossings. We shall now focus our attention on methods which will substantially multiply the zero crossing rate thus necessarily increasing the spectral spread.

2.7. A convenient way to increase the mean rate of zero crossings is to clip different versions (integrated, differentiated, all-pass filtered, etc.) of the speech wave and multiply the square waves obtained in this manner.

The multiplier developed for this purpose will be described in detail because it leads directly to a satisfactory distortion device. The multiplier consists simply of a piece-wise linear network with an input-output characteristic of straight-line segments (see Fig. 4). The output is +1 volt for inputs 0 and

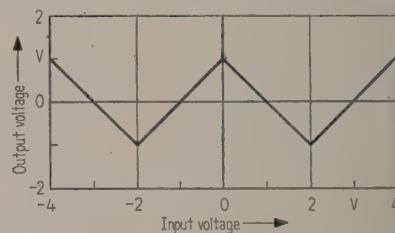


Fig. 4. Input-output voltage characteristic of diode network for sign multiplication. The sum of four algebraic signs is supplied to the input. The product of the four signs appears at the output.

± 4 volts, and -1 volt for input ± 2 volts. Thus, if four square waves of amplitude ± 1 volt are added and applied to the input of this network, the output will be the product of these square waves. This multiplier produces many zero crossings and distortion components up to 10 kc/s and beyond. When it was connected to the vocoder synthesizer to provide the excitation function, the result was an appreciable improvement over all systems described so far. In particular, it was the first vocoder in the course of this study which included voiced excitation. In all likelihood, it was also the first successful vocoder for a substantial voice frequency range having both voiced and unvoiced excitation *without*

explicit pitch detection and voiced-unvoiced decision.

The only obvious fault in this vocoder was an occasional "rattle" perceptible during voiced sounds with strong components above 3 kc/s. This effect was traced to a loss of periodicity in the clipped versions of speech utilized in this scheme. The difficulty with infinite clipping is that rather minute deviations from perfect periodicity, which often occur in speech, can lead to sizeable aperiodicities in the clipped output. One can easily convince oneself of this by listening to a damped sine wave with added low-frequency noise, the latter being just below the threshold of hearing. After clipping, this combination can sound quite "rattly." Evidently, this effect is due to the infinite amplification inherent in infinite clipping. What is needed is a "softer" (i. e., no discontinuities in the time wave) but equally powerful (i. e., uniform spreading in the frequency domain) distortion scheme. For a time, these two requirements seemed contradictory. However, an analysis of the multiplier function led to the desired compromise of soft and powerful distortion.

2.8. As was mentioned above, the multiplier for square waves in effect multiplies the number of zeroes of its input waveform. Note that

a) This function of the multiplier is quite independent of the specific form of its input (clipping or no clipping) and

b) The multiplication of zeroes is the really important function from the point of view of spectral spreading.

Thus, if one applies a sine wave of amplitude greater than three to a nonlinear network having the input-output characteristic showing in Fig. 4, he obtains four zeros at its output for every zero at the input. This multiplication of zeroes is accompanied by the desired spectral spreading. Measuring the spectral width by the second moment, ω^2 , of the power spectrum, $P(\omega)$:

$$\overline{\omega^2} = \frac{\int_0^\infty \omega^2 P(\omega) d\omega}{\int_0^\infty P(\omega) d\omega}, \quad (1)$$

one obtains a particularly simple verification of the spectral spreading effect of nonlinear networks. As a consequence of Parseval's theorem [8], [9], the second moment of a power spectrum is related to integrals over the corresponding time function, $s(t)$, and its derivative as follows

$$\omega^2 = \frac{\int \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt}{\int [s(t)]^2 dt}. \quad (2)$$

For the particular network shown in Fig. 4, $(ds/dt)^2$ is the same for input and output because of the $\pm 45^\circ$ slope of its branches. However, for a signal whose absolute amplitude exceeds two volts at any time, the output signal will have a smaller amplitude than the input signal for such instants of time. Thus,

$$\int [s_{out}(t)]^2 dt < \int [s_{in}(t)]^2 dt, \quad (3)$$

and with (2)

$$\overline{\omega_{out}^2} > \overline{\omega_{in}^2}. \quad (4)$$

The exact amount of spectral spreading can be computed for any given input waveform. In the rather trivial case of a sawtooth wave with extremal amplitudes of ± 4 volts, the spectral spreading will be by a factor 4:

$$\sqrt{\overline{\omega_{out}^2}} = 4 \sqrt{\overline{\omega_{in}^2}}.$$

For a sine wave of amplitude 4 volts, the spectral spreading is somewhat larger than 4. Detailed computation shows

$$\sqrt{\overline{\omega_{out}^2}} = 4.4 \sqrt{\overline{\omega_{in}^2}}.$$

Thus, the network has many desirable properties. It has a continuous input-output characteristic and allows for any desired spectral spreading by using a sufficient number of "zig-zags" in its characteristic. In addition, this kind of nonlinear network has another property which is very desirable in the present context: above a certain threshold its peak-to-peak output voltage is constant! Thus it appears that the output of the network is ideally suited as an excitation function for vocoder synthesis purposes.

However, it is not actually the peak-to-peak voltage but the spectral power density which must be kept constant in a vocoder excitation waveform. The present nonlinear circuit spreads the spectrum more for large input amplitudes. This results in a decrease of the spectral power density at the output, a "thinning-out," so to speak, of the total available power at the output of the nonlinear network. In order to overcome this effect of different input amplitudes, instantaneous logarithmic compression of the speech signal applied to the "zig-zag" network has been used.

Fig. 5 shows an actual distortion network consisting of eight diodes. The four diodes on the left implement an instantaneous logarithmic compression characteristic. The remaining four diodes produce a "W"-shaped response. Both responses in tandem produce the desired characteristic which is depicted in Fig. 6.

The effect of this distortion on a band of noise sharply low-pass filtered at 3.2 kc/s is shown in Fig. 7. The distortion components between 3 kc/s and 10 kc/s are quite flat. The slight drop between

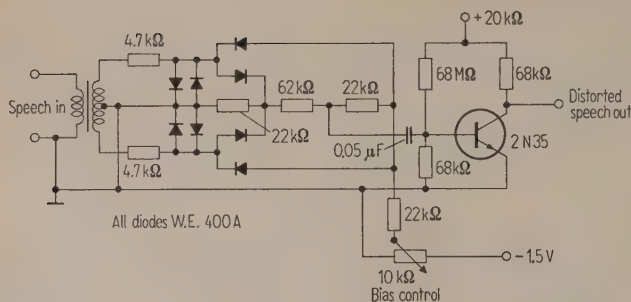


Fig. 5. Distortion network used in the laboratory model of the high-quality vocoder.

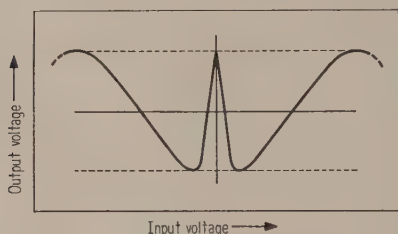


Fig. 6. Nonlinear input-output voltage characteristic of distortion network shown in Fig. 5.

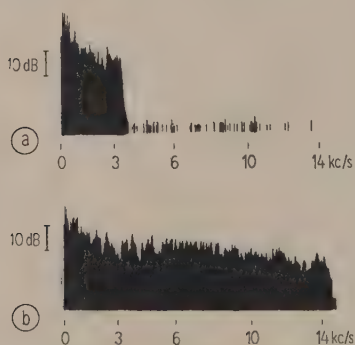


Fig. 7. Broadening of 3.2 kc/s low-pass filtered Gaussian noise by distortion network shown in Fig. 5.

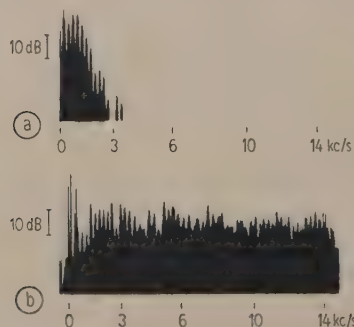


Fig. 8. (a) Spectrum of vowel /a/ (as in "father").
(b) Same after distorting the frequency components below 3 kc/s. Regenerated frequency components between 3 kc/s and 10 kc/s are used to provide the excitation of the vocoder synthesizer.

5 kc/s and 10 kc/s could be equalized readily with a simple RC-network.

The effect on some band-limited speech sounds is indicated in Figs. 8, 9, 10, and 11. The equalization for /s/ is perfect. This is fortunate because /s/ (and /t/) have the greatest high frequency content and consequently have the most to gain from an increase in bandwidth. The response for /ʃ/ is not as good. The resonance at 3 kc/s is reproduced at 6 kc/s and 9 kc/s. However, this lack of perfection in the excitation spectrum is hardly noticeable in the reproduction of an isolated /ʃ/, let alone a /ʃ/ in connected speech. The transformation of an /a/ is shown in Fig. 8 and is also near perfect. Notice the correct reproduction of the line structure even beyond 10 kc/s. The conservation of periodicity is important for the natural reproduction of voiced sounds. The distortion of an /i/ is shown in Fig. 9. The spectrum is not very flat around 7 kc/s. However, the exact spectral shape at such high frequencies is not critical for vowels.

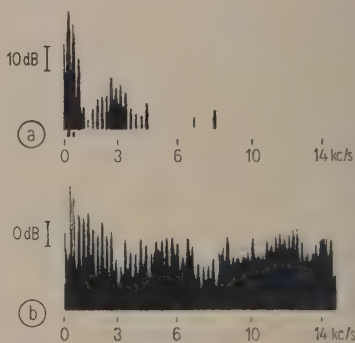


Fig. 9. (a) Spectrum of vowel /i/ (as in "eve").

(b) Same after distorting the frequency components below 3 kc/s.

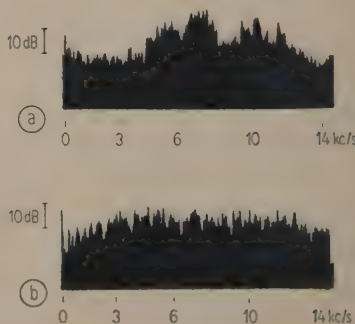


Fig. 10. (a) Spectrum of fricative /s/ (as in "sing").

(b) Same after distorting the frequency components below 3 kc/s.

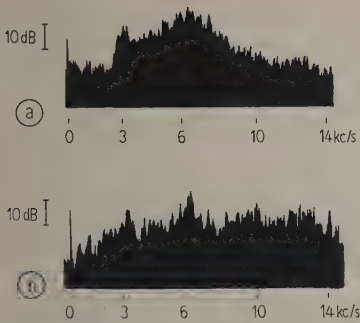


Fig. 11. (a) Spectrum of fricative /ʃ/ (as in "shoe").
(b) Same after distorting the frequency components below 3 kc/s.

As a result of the evolution described above, a satisfactory model of a high-quality vocoder was constructed using the distortion characteristic of Fig. 5 to generate both voiced and unvoiced excitation. A 3.2 kc/s uncoded baseband was incorporated along with six vocoder spectrum channels covering the band from 3.2 to 10 kc/s. The total transmission band was less than 3.5 kc/s. Informal listening tests indicate that this scheme yields a net gain in both intelligibility and quality over a 3.5 kc/s band of speech. Results of formal listening tests are given in chapter 3.

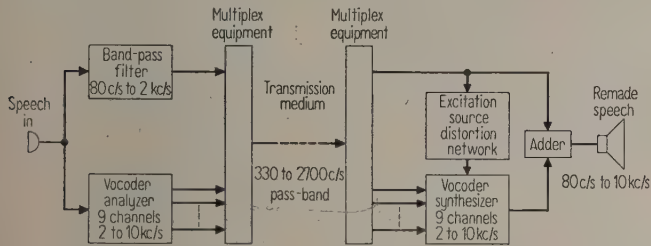


Fig. 12. Vocoder system for transmitting high-quality speech over a narrow bandwidth. Allocation of frequencies in the transmission pass-band is shown in Fig. 13.

A vocoder model suitable for application to telephone circuits whose pass-band is less than 3 kc/s is shown in Fig. 12. It transmits the speech between 80 c/s and 2000 c/s uncoded and that between 2000 c/s and 10 kc/s by nine vocoder channels. The total transmitted spectral range is 9920 c/s. The required transmission bandwidth is 2370 c/s, allowing 30 c/s width plus 20 c/s guardspace for each channel. For instance, a telephone channel passing frequencies between 330 and 2700 c/s could handle the multiplexed signal. The box labelled "excitation source" in Fig. 12 contains the distortion network described previously.

A possible allocation of bandwidths for the nine channel version is shown in Fig. 13. The speech band from 80 c/s to 2000 c/s is shifted upward by

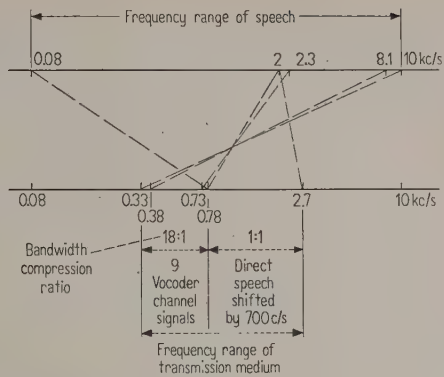


Fig. 13. Allocation of frequencies in the pass-band of the transmission medium. The nine vocoder channels occupy the frequency band from 330 c/s to 780 c/s in an inverted order. They represent the speech information in the bands 2.0 – 2.3 – 2.6 – 3.0 – 3.5 – 4.2 – 5.2 – 6.5 – 8.1 – 10.0 kc/s. The uncoded speech band from 80 c/s to 2 kc/s is shifted upward to the frequency band from 780 c/s to 2.7 kc/s.

700 c/s to accommodate the speech components between 80 c/s and 200–300 c/s which are not ordinarily transmitted in telephony. In addition, the shift makes space for the nine vocoder channel signals which carry the intelligence in the band from 2 kc/s to 10 kc/s. The channels representing the speech frequency components immediately below 10 kc/s are located near the lower edge of the transmission band. Thus, if the transmission channel has a lower cut-off frequency above 330 c/s, only the very highest frequency in the vocoder multiplex transmission would suffer and no "holes" in the spectrum would be created. Low-index FM, single-sideband AM, or double-sideband AM, with two carriers in quadrature are possible multiplexing methods. In any case, the multiplex process should accommodate the nine signals, each having a spectrum extending up to a maximum of 30 kc/s, in a total bandwidth of about 450 c/s. The actual compression for the high frequencies is thus 8000 c/s to 450 c/s or 18 : 1. The effective compression for the entire transmitted band is 9920 c/s to 2370 c/s, or 4.2 : 1.

3. Results of intelligibility tests and conclusions

A laboratory model of a high-quality vocoder incorporating a 3.2 kc/s uncoded baseband and six spectrum channels covering the band 3.2 to 10 kc/s has been constructed. The transmission bandwidth

including the baseband is 3.5 kc/s. The vocoder utilizes the principles enunciated earlier to derive its synthesis excitation for both voiced and voiceless sounds from the baseband by a nonlinear distortion network.

Critical listening tests using isolated English words indicate a considerable gain in articulation compared to a simple 3.5 kc/s circuit. The improvement is particularly noticeable in words containing plosive and fricative sounds.

In order to obtain a more complete picture of the improvement in intelligibility, extensive tests were conducted². The data was evaluated according to the method of confusion matrices described in detail by MILLER and NICELY [10]. The procedure and results of these tests are summarized below.

The following three transmission conditions were evaluated:

- high-quality speech band-limited at 90 c/s and 10 kc/s.
- the voice-excited vocoder comprising a baseband from 90 c/s to 3.2 kc/s and six constant- Q spectrum channels from 3.2 kc/s to 9.5 kc/s.
- speech bandlimited at 200 c/s and 3.2 kc/s.

Speech samples for the tests were obtained from a master tape that was recorded in a soundproof booth on an Ampex 300 tape-recorder using an Altec 21-BR-150 condenser microphone. The speakers were two males and three females with the General American dialect. Their accuracy of pronunciation was monitored by an experienced phonetician who required the speakers to repeat a syllable if necessary.

Each speaker pronounced a list of fifty nonsense-syllables consisting of two repetitions of the following 25 syllables in random order:

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| /pa/ | /ta/ | /ka/ | /ba/ | /da/ | ³ |
| /ga/ | /fa/ | /θa/ | /sa/ | /ʃa/ | |
| /ha/ | /va/ | /ða/ | /za/ | /tʃa/ | |
| /dʒa/ | /spa/ | /sta/ | /ska/ | /pra/ | |
| /tra/ | /kra/ | /fra/ | /θra/ | /ʃra/ | |

The listeners, totalling ten in number, were seated in the same soundproof booth in which the recordings had been made. The test syllables were reproduced from an Ampex 300 tape-recorder and an Ampex 620 amplifier and loudspeaker. The sound level was monitored with a General Radio sound-level meter 1551-A and kept close to 74 dB re 0.0002 μbar at all head positions. The over-all signal-to-noise ratio was 41 dB.

² These tests were carried out by Mr. W. L. CONGLETON under the supervision of Dr. NEWMAN GUTTMAN.

³ /ð/ as in that, /θ/ as in thin, /dʒ/ as in judge.

Before the actual tests, the listeners underwent a considerable period of training both in listening and phonetic transcription of the sounds they heard.

For each of the three conditions a), b), c) there was a total of 2500 decisions to be made (25 syllables, 2 repetitions, 5 talkers, 10 listeners). The total number of confusions for the three test conditions was found to be

- for high-quality speech: 60 out of 2500 possible confusions or 2.4% error.
- for the vocoder: 115 out of 2500 possible confusions or 4.6% error.
- for 3.2 kc/s band-limited speech: 197 out of 2500 possible confusions or 7.9% error.

Among the more noteworthy results are the following. Even in the high-quality case a), 16 out of 100 /θa/ were mistaken for /fa/ and 6 /θa/ were mistaken for /sa/. For the vocoder, case b), the corresponding figures were 14 and 14, respectively. In addition, for the vocoder 25 out of 100 /sa/ were heard as /θa/ while there were no mistakes in the high-quality case a). This is the only serious degradation introduced by the vocoder compared to high-quality speech. Its source is presently being studied.

Other noteworthy, if slight, confusions introduced by the vocoder are 3 out of 100 /ta/ with /pa/ and 4 out of 100 /ta/ with /ka/.

In comparing the vocoder with the 3.2 kc/s band-limited speech, it was noted that many of the more serious confusions of the latter were *almost completely eliminated*. The 3.2 kc/s bandlimited speech showed the following confusions (out of 100 possible for each pair):

| | |
|-----------------|---------------------|
| 13 spoken /fra/ | were heard as /θra/ |
| 12 spoken /ka/ | were heard as /ta/ |
| 10 spoken /ga/ | were heard as /da/ |
| 10 spoken /sa/ | were heard as /ʃa/ |
| 7 spoken /fra/ | were heard as /tra/ |
| 6 spoken /ða/ | were heard as /θa/ |
| 5 spoken /pra/ | were heard as /tra/ |
| 4 spoken /tʃa/ | were heard as /ʃa/ |
| 4 spoken /ska/ | were heard as /sta/ |
| 4 spoken /fa/ | were heard as /θa/ |

These 75 confusions were reduced by the vocoder to 3 confusions, namely:

| | |
|----------------|---------------------|
| 2 spoken /fra/ | were heard as /θra/ |
| 1 spoken /pra/ | was heard as /tra/ |

In addition to the considerable gain in intelligibility, all listeners agree that the vocoder improves the reproduction quality markedly. In comparing the vocoder output with an unlimited band of the input speech, certain distortions can be discerned. These appear as a background, speech-correlated noise well below the annoyance level. Listeners comment that the vocoder output is much more

similar to the wide-band original speech than to a 3.2 kc/s bandlimited sample. Furthermore, since the initiation of this study improved methods of spectral spreading have been proposed and tested by Messrs. B. F. LOGAN and A. J. PRESTIGIACOMO and the authors. Our conclusion is, therefore, that the vocoder principle can be utilized to improve both intelligibility and reproduction quality using the usual telephone channels.

Even more important, the rationale developed here appears to be applicable to vocoders generally, thereby avoiding the necessity for pitch detection and leading to improved quality. The question here is how narrow a baseband is tolerable for the purposes of spectrum spreading. Recent work by Messrs. B. F. LOGAN and A. J. PRESTIGIACOMO has shown that a baseband of a few hundred c/s in width suffices, making possible a bandwidth compression by a factor of two to four for telephone-quality signals.

Acknowledgements

We are indebted to Mr. H. W. HINES for conducting the auxiliary experiments and building the laboratory models of the various vocoder schemes described here including our first fully voice-excited vocoder. Dr. NEWMAN GUTTMAN kindly supervised the psychological experiments. We also wish to acknowledge the constant interest and encouragement of Dr. J. R. PIERCE.

(Received June 10th, 1959.)

References

- [1] DUDLEY, H., Signal transmission. U. S. Patent 2,151,091. Filed October 30, 1935. First notebook entries October 1, 1928.
- [2] DUDLEY, H., Remaking speech. J. acoust. Soc. Amer. **11** [1939], 169.
- [3] DAVID, Jr., E. E., Signal theory in speech transmission. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-3 [1956], 232.
- [4] STEINBERG, J. C., Speech analyzing and synthesizing communication system. U. S. Patent 2,635,146. Filed December 15, 1949.
- [5] FLANAGAN, J. L. and HOUSE, A. S., Development and testing of a formant-coding speech compression system. J. acoust. Soc. Amer. **28** [1956], 1099.
- [6] SCHROEDER, M. R., Vocoder transmission system. U. S. Patent 2,857,465. Filed November 21, 1955.
- [7] ENKEL, F. and MEYER-EPPLER, W., Verfahren zur Übertragung oder Speicherung von Schallereignissen, bei dem der zu übertragende Frequenzbereich in zwei getrennte Bereiche aufgeteilt wird. German Patent 957 235. Patented from April 21, 1953, on.
- [8] WOODWARD, P. M., Probability and information theory, with applications to radar. McGraw-Hill Book Co., New York 1955.
- [9] LIGHTHILL, M. J., Introduction to Fourier analysis and generalized functions. University Press, Cambridge 1958. See also any of a number of good introductions to the theory of Fourier transformation.
- [10] MILLER, G. A. and NICELY, P. E., An analysis of perceptual confusions among some English consonants. J. acoust. Soc. Amer. **27** [1955], 338.

5. Tonmeistertagung

vom 18. bis 21. Oktober 1960 in Detmold
(Nordwestdeutsche Musik-Akademie)

Alle Interessenten an den musikalischen und technischen Problemen der elektroakustischen Musikaufnahme und -wiedergabe sind zu dieser Tagung eingeladen.

Die Referate sollen um zwei Schwerpunkte gruppiert werden: Die erste Gruppe enthält Themen aus dem Bereich der Geistes- und Musikwissenschaft, der musikalischen Interpretation sowie der physiologischen Akustik und Tonpsychologie. In der zweiten Gruppe sind die physikalischen und technischen Themen (Mikrophone, Lautsprecher, Aufzeichnung, Aussteuerungskontrolle, Studiotechnik, Raumakustik u. a.) zusammengefaßt. Insbesondere sind Referate über die Wechselbeziehungen zwischen den musikalischen und technischen Bereichen erwünscht.

Als technisches Hauptthema soll die Stereophonie im Mittelpunkt der Erörterungen stehen, nachdem das Pro-

blem der stereophonischen Schallplattenaufzeichnung nunmehr gelöst worden ist und vielerlei Erfahrungen über die Durchführung stereophonischer Aufnahmen vorliegen. Neben den Referaten wird bei dieser Tagung auf Vorführung von Aufnahmen aller Art besonderer Wert gelegt, wobei auch die elektronischen Verfahren zur Klangtransformation (Stilisierung von Klängen und Geräuschen als Hörspiel- oder Filmbegleitung oder als akustische Kulisse im Theater) einbezogen werden sollen.

Anmeldungen für Referate werden möglichst bald, spätestens jedoch bis Ende Juni 1960 erbeten an

Prof. Dr. E. THIENHAUS,
Nordwestdeutsche Musik-Akademie,
Detmold.

Anmeldungen zur Teilnahme an der Tagung nimmt das Sekretariat der Musik-Akademie entgegen.

SCHALLAUSBREITUNG IN TEILWEISE DISSOZIIERTEM, GASFORMIGEM DISTICKSTOFFTETROXYD

von G. SESSLER

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Für dissoziierendes Distickstofftetroxyd (N_2O_4) werden Schallabsorption und -geschwindigkeit berechnet und Meßergebnisse dieser Größen mitgeteilt.

Die Berechnung erfolgt unter der Voraussetzung, daß das N_2O_4 -Molekül dann dissoziiert, wenn es in ganz bestimmten Schwingungsfreiheitsgraden durch Stöße mit anderen Molekülen die Dissoziationsenergie angesammelt hat. Die Energieansammlung soll in zwei Schritten erfolgen, die Energie also zunächst auf einen Zwischenwert E und dann auf die Dissoziationsenergie ansteigen. — Der Beitrag der Translations-, der Rotations- und der am Dissoziationsvorgang nicht beteiligten Schwingungsfreiheitsgrade zur Absorption und Dispersion wird additiv berücksichtigt.

Der experimentelle Teil der Arbeit wurde mit den für Messungen in dissoziierenden Gasen besonders geeigneten elektrostatischen Wandlern mit festem Dielektrikum durchgeführt. Die Messungen erfolgten bei 20°C und 53°C , bei Drucken zwischen 1 und 200 Torr und bei Frequenz/Druck-Werten zwischen 10^5 und 10^8 Hz/atm. Die Meßergebnisse bestätigen die Theorie. Für E ergibt sich 4,5 kcal/Mol bei 20°C und 53°C . Die Geschwindigkeitskonstante des N_2O_4 -Zerfalls ist druckproportional und — umgerechnet auf 1 atm bei 20°C bzw. 53°C — $1,7$ bzw. $8,4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$.

Summary

Sound absorption and velocity are calculated for dissociating dinitrogen-tetroxide (N_2O_4) under the assumption that the N_2O_4 -molecule dissociates as soon as energy is accumulated in certain vibrational degrees of freedom from collisions with other molecules. The accumulation of energy shall be made in two steps: at first the stored energy reaches an intermediate value E and then it rises to the value of the dissociation energy. The effects of translational, rotational, and those vibrational degrees of freedom, which do not influence the dissociation on absorption and dispersion are added.

In the experimental part of the work electrostatic transducers with solid dielectric were used. These have proved to be very useful for measurements in dissociating gases. Measurements were made at temperatures 20°C and 53°C , pressures between 1 and 200 mm Hg, and at frequency by pressure values ranging from 10^5 to 10^8 (c/s)/atm. These measurements confirm the theory. For E , 4.5 kcal/mol was found at 20°C and 53°C . The rate of dissociation constant is proportional to the pressure. Referred to 1 atm and 20°C , $1,7 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ and for 53°C , $8,4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ was obtained for this constant.

Sommaire

On a calculé l'absorption du son et sa vitesse pendant la dissociation du dinitrogène-tetroxyde (N_2O_4). Et on a indiqué également des valeurs expérimentales.

On a fait le calcul en supposant que la molécule de N_2O_4 se dissocie dès que l'énergie de dissociation est atteinte dans certains degrés de liberté de vibrations lors des chocs avec d'autres molécules. On doit atteindre l'énergie voulue en deux temps: d'abord l'énergie atteint une valeur intermédiaire E et ensuite elle atteint la valeur de l'énergie de dissociation. Les effets sur l'absorption et la dispersion des degrés de liberté de translation, de rotation et de vibration (sans influence sur la dissociation) s'ajoutent.

Dans la partie expérimentale du travail on a utilisé des transducteurs électrostatiques à diélectrique solide. Ils se sont révélés fort utiles pour les mesures dans la dissociation des gaz. Les mesures furent faites aux températures de 20°C et 53°C , pour des pressions de 1 et 200 Torr et pour des fréquences dans la gamme des valeurs de pressions de 10^5 à 10^8 Hz/atm. La théorie se trouve confirmée par les résultats expérimentaux. On a trouvé pour E 4,5 kcal/mol à 20°C et 53°C . Le taux de la constante de dissociation est proportionnel à la pression. La valeur obtenue pour cette constante était pour 1 atm et 20°C de $1,7 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ et pour 53°C de $8,4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$.

1. Einleitung

Die Schallausbreitung in teilweise dissoziierten Gasen ist seit vielen Jahrzehnten ein Gegenstand der

theoretischen und experimentellen Forschung. Besonders interessante Ergebnisse erhoffte man sich dabei vom Distickstofftetroxyd (N_2O_4). Dieses ist schon bei Zimmertemperatur zu einem beträchtlichen Teil

in Stickstoffdioxid (NO_2) dissoziiert, was eine hohe molekulare Absorption und Dispersion erwarten läßt.

Als erste vermuteten NERNST und KEUTEL, daß die Schallgeschwindigkeit in dissoziierendem N_2O_4 mit zunehmender Frequenz dann ansteigen muß, wenn die Frequenz von der Größenordnung der Geschwindigkeitskonstante der Dissoziation ist. Die von KEUTEL [1] durchgeführten Schallgeschwindigkeitsmessungen ergaben jedoch nicht den erwarteten Effekt. Einige Jahre später veröffentlichte SELLE [2] Messungen, die tatsächlich eine Zunahme der Schallgeschwindigkeit mit der Frequenz zeigten. Im Gegensatz dazu ergaben Messungen von GRÜNEISEN und GOENS [3] in demselben Frequenzbereich wiederum konstante Schallgeschwindigkeit.

Die erste Berechnung der Schallgeschwindigkeit in dissoziierenden, idealen Gasen mit vernachlässigbarer Absorption gab EINSTEIN [4]. Die Berechnung der Schallabsorption erschien zum damaligen Zeitpunkt uninteressant, da zu deren Messung noch keine zureichenden Methoden entwickelt waren. Die von EINSTEIN für beliebige, nach der Gleichung $J_2 \rightleftharpoons 2J$ reagierende Moleküle verwendete Reaktionsgleichung lautet

$$k_2 n_2 - k_1 \frac{n_1^2}{v} = - \frac{dn_2}{dt} \quad (1)$$

Dabei sind k_1 bzw. k_2 die Geschwindigkeitskonstanten des Assoziations- bzw. Dissoziationsvorgangs, n_1 bzw. n_2 die Molzahlen der NO_2 - bzw. N_2O_4 -Moleküle, v das Gesamtvolumen und t die Zeit.

Die Gl. (1) setzt voraus, daß die Zahl der zerfallenden Moleküle proportional zur Zahl aller J_2 -Moleküle ist. In Wirklichkeit sind jedoch im wesentlichen nur angeregte J_2 -Moleküle zerfallsbereit. Deshalb ist Gl. (1) bei Abweichungen vom Gleichgewichtszustand, wie sie in einer Schallwelle auftreten, nicht mehr richtig und muß in einer unten zu besprechenden Weise geändert werden.

Als erster ließ LUCK [5] die Voraussetzung eines idealen Gases fallen und berechnete für ein reales, absorbierendes Gas mit dissoziierenden Molekülen die Schallgeschwindigkeit und die Schallabsorption.

Die Theorien von EINSTEIN und LUCK berücksichtigten als Ursache der Dispersion nur die verzögerte Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts. Jedoch gab die EINSTEINSche Arbeit den Anstoß zur Suche nach anderen Ursachen der molekularen Absorption und Dispersion. Das Ergebnis dieser Untersuchungen, die vor allem von KNESER [6] durchgeführt wurden, war, daß auch die verzögerte Einstellung der Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgrade mehratomiger Gase molekulare Absorption und Dispersion erzeugt. Auch beim N_2O_4 und beim NO_2 war wegen der großen Zahl der Schwingungsfreiheitsgrade ein merklicher Beitrag zu erwarten.

Der Einfluß der Schwingungsanregung auf die Absorption und Dispersion in dissoziierendem N_2O_4 wurde zum erstenmal von RICHARDS und REID [7] sowie von KNESER und GAULER [8] berücksichtigt. KNESER und GAULER gingen dabei so vor, daß sie für die allgemein formulierte Reaktion $J_2 \rightleftharpoons 2J$ dieselbe Reaktionsgleichung (1) wie EINSTEIN voraussetzten. Eine zweite Reaktionsgleichung für die Anregung eines J_2 -Schwingungsfreiheitsgrades wurde so angesetzt, daß nur die Dissoziation nichtangeregter Moleküle möglich ist. Außerdem wurde vorausgesetzt, daß die Zahl der angeregten J_2 -Moleküle klein gegen die Zahl aller J_2 -Moleküle ist, was im Fall des N_2O_4 nicht zutrifft. Das Ergebnis der Theorie von KNESER und GAULER ist, daß die Gesamtaborption und -dispersion dann größer als die Summe der Anteile der Dissoziation und der Anregung ist, wenn beide Absorptionsmaxima etwa bei demselben f/p -Wert liegen. Andernfalls addieren sich die Anteile in erster Näherung. Im letzteren Fall liefert dann die Theorie von KNESER und GAULER für den Dissoziationsanteil dasselbe Ergebnis wie die — allerdings nur für die Schallgeschwindigkeit vollständig durchgerechnete — Theorie von EINSTEIN. Die Bilder 1 und 2 zeigen ¹ für den Fall sehr kleiner Relaxationszeit der Schwingungsanregung ² die durch Dissoziation zustande kommende, auf die Phasenkonstante bezogene maximale Absorption $(\alpha/\beta)_{\max}$ und das

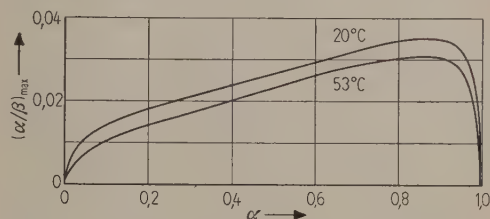


Bild 1. Höhe des durch Dissoziation entstehenden Absorptionsmaximums in Abhängigkeit vom Dissoziationsgrad nach den Ansätzen von EINSTEIN und der Theorie von KNESER und GAULER. Die Relaxationszeit der Schwingungsfreiheitsgrade ist als sehr klein vorausgesetzt.

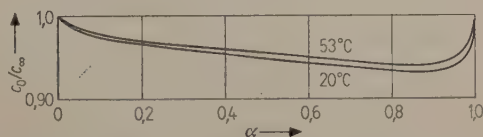


Bild 2. Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten c_0/c_∞ in Abhängigkeit vom Dissoziationsgrad nach EINSTEIN sowie KNESER und GAULER.

¹ Bei der Berechnung wurde als Wärmetönung der Reaktion 13,7 kcal/Mol angenommen und die spezifische Wärme aus Gl. (40) und Tabelle II (siehe auch Bild 9) berechnet.

² also additiven Anteilen.

Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten bei tiefen und hohen Frequenzen c_0/c_∞ bei 20° C und 53° C. Abszisse ist der Dissoziationsgrad.

Die von KISTIAKOWSKY und RICHARDS [9], RICHARDS und REID [7] sowie TEETER [10] veröffentlichten Schallgeschwindigkeits- und, allerdings noch sehr unzureichenden, Schallabsorptionsmessungen ergaben wiederum keine klare Entscheidung über den Anteil der einzelnen Ursachen an der Absorption und Dispersion und ließen auch die Frage nach der Größe der Geschwindigkeitskonstante des N_2O_4 -Zerfalls offen. Das lag daran, daß die Autoren nur Messungen bei relativ kleinen Frequenzen und hohen Drucken durchführten. Daher konnte z. B. die obere Grenze der Schallgeschwindigkeit überhaupt nicht gemessen werden. Da zudem nicht bekannt war, ob die Geschwindigkeitskonstante des N_2O_4 -Zerfalls proportional zum Gasdruck ist und da den Theorien die oben erwähnten Mängel anhafteten, konnte für die erwähnte Geschwindigkeitskonstante k_2 nach KNESER und GAULER [8] nur die Beziehung $3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} < k_2 < 4 \cdot 10^5 \text{ s}^{-6}$ bei 1° C und 260 Torr angegeben werden. Bei höherer Temperatur wurde eine starke Zunahme von k_2 erwartet.

In den folgenden Jahren wurde das Problem in allgemeinerer Weise theoretisch von DAMKÖHLER [11] und MEIXNER [12] behandelt. DAMKÖHLER berechnete die Schallausbreitung in schnell reagierenden Systemen mit beliebig vielen anregbaren oder reagierenden Komponenten. MEIXNER stellte als Spezialfall seiner allgemeinen Theorie Gleichungen für die Absorption und die Schallgeschwindigkeit in einem Gas unter vollständiger Berücksichtigung von innerer Reibung, Wärmeleitung, Diffusion und Dissoziation auf. Detaillierte Aussagen über das hier vorliegende Problem waren mit diesen Theorien nicht möglich, da die speziellen Reaktionsmechanismen und Konstanten nur ungenau bekannt waren.

In jüngster Zeit versuchten CARRINGTON und DAVIDSON [13] durch Stoßwellenversuche und BAUER und GUSTAVSON [14] (siehe auch BAUER [15]) durch eine Kompressionsmethode die Reaktion $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$ zu erforschen. Da CARRINGTON und DAVIDSON den NO_2 - und N_2O_4 -Gehalt des Gemischs photometrisch bestimmten, hatte die Anregung der Schwingungsfreiheitsgrade kaum einen störenden Einfluß auf die Bestimmung der Geschwindigkeitskonstante, des N_2O_4 -Zerfalls. Dagegen ist die aus den Messungen von BAUER und GUSTAVSON folgende Relaxationszeit und damit die Geschwindigkeitskonstante ganz erheblich davon abhängig, ob bei der Auswertung die Schwingungsanregung mitberücksichtigt wird oder nicht. Die Genauigkeit beider Meßverfahren wird durch die nur ungenügend bekannten hydrodynamischen Daten, die Schwierigkeiten bei der Be-

rechnung der Dichteschwankungen und durch experimentelle Schwierigkeiten stark begrenzt (siehe [14]). — Trotzdem führten die Messungen von CARRINGTON und DAVIDSON sowie BAUER und GUSTAVSON zu einer verbesserten Kenntnis der Reaktion $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$ und zu einer genaueren Bestimmung ihrer Geschwindigkeitskonstante und Aktivierungsenergie (siehe Abschnitt 2).

Ganz allgemein mit der Schallausbreitung in reagierenden Gasen befassen sich neuere, vorwiegend theoretische Arbeiten von FREEDMAN [16], MANES [17], TABUCHI [18], BEYER [19] und anderen Autoren. TABUCHI [18] gab Formeln für die Schallabsorption und -dispersion in realen Gasen an, in denen mehrere Reaktionen parallellaufen können. Die Relaxationszeiten der Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade setzte TABUCHI als so klein voraus, daß die Anregung dieser Freiheitsgrade in dem betrachteten Frequenzbereich nur einen zu f/p proportionalen Beitrag zur Schallabsorption liefert. Eine Erweiterung der Theorie auf den Fall einer Zwischenstufe der Reaktionen ist angedeutet. — BEYER [19] berechnete die Schallabsorption und -dispersion in Gasen mit zwei (voneinander abhängigen oder unabhängigen) Relaxationserscheinungen. Die Reaktionsgleichungen setzte er als linear voraus.

2. Die Reaktion $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$

Die Partialdrücke p_{NO_2} und $p_{N_2O_4}$ des NO_2 und des N_2O_4 sind durch die Gleichgewichtskonstante $K_p = (p_{NO_2})^2/p_{N_2O_4}$ verbunden. Zu der auf die NO_2 - und N_2O_4 -Konzentration bezogenen Gleichgewichtskonstante K_c und den Geschwindigkeitskonstanten k_1 und k_2 besteht die Beziehung $K_p = K_c RT = (k_2/k_1) RT$. Die Konstante K_p haben SCHREBER [20], BODENSTEIN [21] u. a. bestimmt. Nach BODENSTEIN ist

$$\log_{10} K_p = -\frac{2692}{T} + 1,75 \log T + 0,00483T - 7,144 \cdot 10^{-6} T^2 + 3,062 \quad (2)$$

(K_p in atm).

Die mit Gl. (2) berechneten Dissoziationsgrade in Abhängigkeit von Druck und Temperatur wurden in der vorliegenden Arbeit verwendet³. Die an sich geringe und in Gl. (2) nicht zum Ausdruck kommende Druckabhängigkeit von K_p , die durch Abweichungen vom idealen Gaszustand verursacht wird, haben VERHOEK und DANIELS [22] gemessen.

³ Zwischen der Gleichgewichtskonstante K_p , dem Gesamtdruck p und dem Dissoziationsgrad α besteht die Beziehung

$$K_p = \frac{4 \alpha^2 p}{1 - \alpha^2}.$$

Die Wärmetönung der Reaktion ist bei 25°C nach GIAUQUE und KEMP [23] 13,7 kcal/Mol. Die Aktivierungsenergie des N_2O_4 -Zerfalls ist nicht genau bekannt. Sie kann aus der Temperaturabhängigkeit von k_2 bestimmt werden. Nach RICHARDS und REID [7] beträgt sie $13,9 \pm 0,9$ kcal/Mol. Dieser Wert ist allerdings wegen der im Abschnitt 1 erwähnten Mängel in der Bestimmung von k_2 sehr unsicher. CARRINGTON und DAVIDSON [13] bestimmten als Aktivierungsenergie $11,0 \pm 0,6$ kcal/Mol, also einen wesentlich kleineren Wert als die Wärmetönung.

Die Geschwindigkeitskonstante des N_2O_4 -Zerfalls (siehe auch Tabelle VIII) haben RICHARDS und REID [7] aus Schalldispersionsmessungen zu $k_2 = 5,3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ bei 260 Torr und 25°C bestimmt. Nach KNESER und GAULER [8] sind aus den Messungen von RICHARDS und REID jedoch nur die Grenzen $3 \cdot 10^4$ und $4 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ für k_2 bei 1°C und dem erwähnten Druck zu entnehmen. BRASS und TOLMAN [24] erhielten bei 1 atm und 25°C mit einer Strömungsmethode $k_2 > 8,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. CARRINGTON und DAVIDSON [13] schlossen aus Stoßwellenversuchen in N_2 mit etwa 1% N_2O_4 -Zusatz, daß die Reaktion $N_2O_4 \rightarrow 2NO_2$ unterhalb 1 atm nach der 2. und bei hohen Drücken nach der 1. Ordnung verläuft⁴. k_2 ist also unterhalb 1 atm proportional zum Druck und hat nach [13] bei 1 atm und 25°C den Wert $6,4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Dem entspricht eine Relaxationszeit von 0,99 μs (zur Berechnung siehe [14]; die Berechnungsmethode wird von HAVEN [25] kritisiert). Bei hohen Drücken ist $k_2 = 3,4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ und druckunabhängig. Die Messungen von BAUER und GUSTAVSON [14] in reinem N_2O_4 bei Drücken unterhalb 1 atm lieferten dagegen eine Relaxationszeit von 0,14 μs , d. h. $k_2 = 4,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ bei 25°C und 1 atm. Die Tatsache, daß die von CARRINGTON und DAVIDSON gemessene Geschwindigkeitskonstante wesentlich kleiner ist, kann nach [14] auf die kleinere Wirksamkeit der Stöße zwischen N_2O_4 - und N_2 -Molekülen im Vergleich zu Stößen zwischen N_2O_4 - und NO_2 - bzw. N_2O_4 -Molekülen zurückgeführt werden.

Die allgemeine Theorie der Geschwindigkeitskonstante unimolekularer Reaktionen⁵ geht auf LINDEMANN (1922) und HINSHELWOOD (1926) zurück. Sie wurde insbesondere von KASSEL [26] und SLATER [27], [28] in eine für das Folgende zweckmäßige Form gebracht. KASSEL berechnete unter anderem die

Geschwindigkeitskonstante unter der Annahme, daß das Molekül ein System schwach gekoppelter quantenmechanischer Oszillatoren darstellt, die alle dieselbe Frequenz haben. Durch Stoß mit einem anderen Molekül kann die Energie der Oszillatoren so erhöht werden, daß — wegen des Energieaustauschs zwischen den Oszillatoren — zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Oszillator eine größere Energie als die Dissoziationsenergie hat. Dann dissoziiert das Molekül. Die Zahl der Oszillatoren, d. h. die Zahl der effektiv wirksamen Schwingungsfreiheitsgrade, ist kleiner als oder höchstens gleich groß wie die Zahl aller Schwingungsfreiheitsgrade des Moleküls. Mit diesen Annahmen berechnete KASSEL die Druckabhängigkeit der Geschwindigkeitskonstante und mit weiteren speziellen Voraussetzungen auch ihren Absolutwert. Unter der Annahme, daß das Molekül aus klassischen Oszillatoren besteht, ergibt sich der klassische Grenzfall dieser Theorie. — Die ersten Theorien von SLATER [27] setzen Moleküle mit klassischen Oszillatoren voraus. Die Zahl der Oszillatoren soll gleich der Zahl der Schwingungsfreiheitsgrade sein und die Frequenzen der Oszillatoren sollen verschiedene Werte haben können. Ein Molekül soll ebenfalls dann dissoziieren, wenn ein Freiheitsgrad mehr als eine bestimmte kritische Energie erreicht. Neuere Theorien von SLATER [28] berücksichtigen die Quantelung der Energie der Oszillatoren.

Die Theorien der Geschwindigkeitskonstante von KASSEL und SLATER sind für die Berechnung der Schallausbreitung insofern von Bedeutung, als sie eine Aussage über die Zahl z der effektiv beim N_2O_4 -Zerfall wirksamen Schwingungsfreiheitsgrade zulassen⁶. z läßt sich beispielsweise durch Vergleich der Druckabhängigkeit der aus den klassischen Theorien von KASSEL und SLATER folgenden Geschwindigkeitskonstanten abschätzen⁷. Die Druckabhängigkeit ist dann nach beiden Theorien dieselbe, wenn in der Theorie von KASSEL z etwa gleich der halben Zahl aller Schwingungsfreiheitsgrade gesetzt wird. Beim N_2O_4 wäre also $z = 6$. Nach einer anderen Methode haben CARRINGTON und DAVIDSON [13] aus der klassischen Theorie von KASSEL und der gemessenen Geschwindigkeitskonstante für N_2O_4 $z \approx 5$ berechnet. Aus dem Druckbereich, in dem die Geschwindigkeitskonstante 1. Ordnung in diejenige 2. Ordnung übergeht, haben CARRINGTON und DAVIDSON $z \approx 4$ abgeschätzt.

⁴ Ist bei der Reaktion $N_2O_4 \rightarrow 2NO_2$ (die Rückreaktion sei ausgeschlossen) dn_2/dt nur zu n_2 proportional, so spricht man von einer Reaktion 1. Ordnung. Ist dn_2/dt sowohl zu n_2 als auch zum Gesamtdruck proportional, so liegt eine Reaktion 2. Ordnung vor. Nach Gl. (1) ist dann je nachdem, ob der N_2O_4 -Zerfall nach der 1. oder nach der 2. Ordnung verläuft, k_2 druckunabhängig oder druckproportional.

⁵ Eine unimolekulare Reaktion ist eine Reaktion vom Typ $A \rightarrow B + C + D + \dots$

⁶ Für die Berechnung der Schallausbreitung genügt eine ungefähre Kenntnis der Zahl z dieser Freiheitsgrade (hier etwa auf ± 2 Freiheitsgrade genau); denn die Ergebnisse dieser Berechnung hängen nicht sehr stark von z ab.

⁷ Mit den die Energiequantelung berücksichtigenden Theorien von KASSEL [26] und SLATER [28] ist ein derartiger Vergleich noch nicht angestellt worden.

Tabelle I. Schwingungszahlen der N_2O_4 - und NO_2 -Normalschwingungen.

| | Autor | ν_1 | ν_2 | ν_3 | ν_4 | ν_5 | ν_6 | ν_7 | ν_8 | ν_9 | ν_{10} | ν_{11} | ν_{12} |
|------------------------|-------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} | cm^{-1} |
| N_2O_4 | SUTHERLAND [29] | 1265 | 1360 | 752 | 813 | 1749 | 1724 | ? | 283 | 380 | 500 | 680 | 1480 |
| | HARRIS und King [30] | 1260 | 1360 | 752 | 813 | 1744 | 1744 | ? | 283 | 382 | 382 | 682 | 682 |
| | WILSON [31] | 1334 | 811 | 265 | 160 | 1722 | 320 | 684 | 500 | 1747 | 430 | 1240 | 748 |
| NO_2 | SUTHERLAND [32] | 1370 | 640 | 1615 | | | | | | | | | |
| | WILSON [33] | 1322 | 751 | 1616 | | | | | | | | | |

Die Betrachtung der Schwingungszahlen des NO_2 - und des N_2O_4 -Moleküls ermöglicht ebenfalls eine Abschätzung der Zahl der wirksamen Freiheitsgrade. Tabelle I zeigt die Schwingungszahlen des N_2O_4 nach SUTHERLAND [29], HARRIS und KING [30], und WILSON (siehe in [31]) sowie des NO_2 nach SUTHERLAND [32] und WILSON [33]. Die Tabelle I, die auch noch zur Berechnung der spezifischen Wärme gebraucht wird, zeigt, daß beim N_2O_4 wohl eine gewisse Übereinstimmung in den gefundenen Frequenzen, nicht aber in ihrer Zuordnung zu den Normalschwingungen besteht. Im folgenden seien für N_2O_4 und für NO_2 die Werte von SUTHERLAND verwendet. Ergänzend wird $\nu_7 = 380 \text{ cm}^{-1}$ gesetzt, da nach HARRIS und KING [30] diese Normalschwingung bei Zimmertemperatur wahrscheinlich nahezu voll angeregt ist. — Nach SUTHERLAND [29] sind die Schwingungen 1 bis 6 des N_2O_4 -Moleküls Schwingungen innerhalb der NO_2 -Gruppen, während bei den Schwingungen 7 bis 12 die beiden NO_2 -Gruppen starr gegeneinander schwingen. Die Schwingungszahlen ν_1 bis ν_6 des N_2O_4 -Moleküls sind etwa paarweise gleich und etwa gleich den Schwingungszahlen des NO_2 -Moleküls. Der Teil der Energie der Normalschwingungen 1 bis 6 des N_2O_4 -Moleküls, der die gegenseitige Bindung der beiden NO_2 -Gruppen nicht beansprucht, wird also bei einer Dissoziation in Schwingungsenergie der beiden NO_2 -Moleküle übergehen. Andererseits wird der größte Teil der Energie der Freiheitsgrade 7 bis 12 zur Dissoziation beitragen. Dementsprechend soll jetzt vorausgesetzt werden, daß energetisch bei der Dissoziation sechs Freiheitsgrade wirksam sind⁸, die jedoch nicht genau mit den Freiheitsgraden 7 bis 12 identisch zu sein brauchen. Setzt man die mittlere Debye-Temperatur dieser Freiheitsgrade gleich 700°K , so entsprechen sie vier klassisch angeregten Freiheitsgraden, was in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von CARRINGTON und DAVIDSON (siehe oben) ist.

Die Anhäufung der zur Dissoziation notwendigen Energie in den sechs N_2O_4 -Freiheitsgraden erfordert im allgemeinen wegen der Größe dieser Energie mehrere Stöße mit anderen Molekülen. Dementspre-

chend gibt es zwischen dem unangeregten und dem zum Zerfall angeregten N_2O_4 -Molekül energetisch mehrere Zwischenstufen⁹. Im folgenden sei angenommen, daß genau eine derartige Zwischenstufe existiert (siehe auch Gl. (6)). Diese sei mit n_2' Molekülen besetzt, die im Mittel in den sechs Freiheitsgraden zusammen die Energie E haben. Zur Vereinfachung der Rechnung werde weiterhin die charakteristische Temperatur aller sechs Freiheitsgrade gleich einem geeignet zu wählenden Mittelwert Θ gesetzt. Dann besteht nach KASSEL [26] (Seite 96) zwischen der relativen Anzahl n_{20}'/n_{20} und der Energie $E = l R \Theta$ (mit diskreten l -Werten) die Beziehung

$$n_{20}'/n_{20} = g e^{-E/RT} \quad (3)$$

mit
$$g = (1 - e^{-\Theta/T})^6 \left(\frac{5+l}{5} \right). \quad (3a)$$

Bild 3 zeigt n_{20}'/n_{20} als Funktion von E für 20°C und 53°C nach Gl. (3) mit $R\Theta = 1400 \text{ cal/Mol}$. Außerdem sind in Bild 3 die für spätere Berechnungen ebenfalls erforderlichen Funktionen

$$K_1 = \frac{n_{20}'}{n_{20}^0} = \frac{n_{20}'/n_{20}}{1 - n_{20}'/n_{20}} \quad (4)$$

und

$$\Phi = \frac{n_{20}}{n_{20}^0} T \frac{d(n_{20}'/n_{20})}{dT} = \frac{n_{20}'}{n_{20}^0} \left(\frac{E}{RT} + \frac{T}{g} \frac{dg}{dT} \right) \quad (5)$$

ingezeichnet.

3. Theorie der Schallausbreitung in teilweise dissoziiertem N_2O_4

3.1. Voraussetzungen

Die Berechnung der Schallabsorption und -dispersion soll nun mit den in den Abschnitten 1 und 2 er-

⁹ Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Molekülstößen, bei denen mindestens die Dissoziationsenergie freiwerden kann, ist so klein, daß zur Erklärung der Geschwindigkeitskonstante ein Stoßausbeutefaktor von etwa 10^4 erforderlich wäre. Durch Einführung einer Zwischenstufe wird dieser Faktor um einige Größenordnungen kleiner. Die Desaktivierungswahrscheinlichkeit pro Stoß derart angeregter Moleküle ist, wie Schallausbreitungsmessungen in vielen anderen Gasen zeigen, vermutlich sehr klein. Deshalb sind diese Moleküle sehr beständig.

⁸ Siehe Fußnote 6.

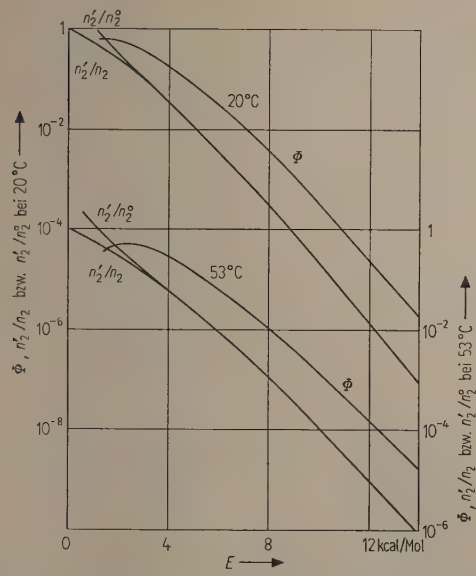
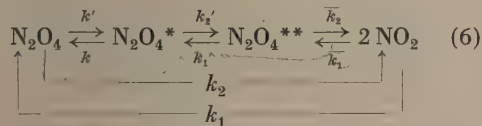


Bild 3. Relative Zahl der angeregten Moleküle und Funktionen Φ nach Gl. (5) in Abhängigkeit von der Anregungsenergie von sechs N_2O_4 -Schwingungsfreiheitsgraden.

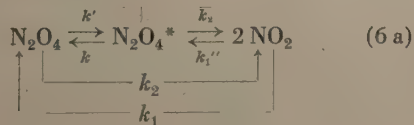
läuterten Anschauungen über den Dissoziationsprozeß erfolgen. Die wichtigsten bisher eingeführten sowie einige zusätzliche Voraussetzungen seien zunächst kurz formuliert:

1. Der Zerfall des N_2O_4 -Moleküls bzw. die Assoziation zweier NO_2 -Moleküle soll folgendermaßen verlaufen:



Dabei sei N_2O_4^* die am Ende von Abschnitt 2 eingeführte Zwischenstufe der N_2O_4 -Anregung und $\text{N}_2\text{O}_4^{**}$ das zum Zerfall angeregte N_2O_4 -Molekül. Die Geschwindigkeitskonstanten k, k', k_1', k_2' sind, da die zugehörigen Reaktionen durch Molekülstöße verursacht werden, druckproportional. Die Geschwindigkeitskonstante k_2 ist druckunabhängig, da der N_2O_4 -Zerfall spontan (nicht durch Stöße) erfolgt.

2. Die Berechnung der Schallausbreitung soll für den Druckbereich erfolgen, in dem der N_2O_4 -Zerfall nach der 2. Ordnung verläuft (d. h. für etwa $p < 1$ atm). Dann kann an Stelle von (6) geschrieben werden:



3. Dabei soll angenommen werden, daß die zur Dissoziation beitragenden sechs Schwingungsfreiheitsgrade beim N_2O_4 bereits die mittlere thermische Energie $E - \bar{E}$, beim N_2O_4^* die Energie E und beim zerfallenden $\text{N}_2\text{O}_4^{**}$ die Energie W_v haben. Bild 4 soll dies veranschaulichen. Im Bild sind links die Energieniveaus (bezogen auf ein Mol), in der Mitte die möglichen Übergänge und rechts die Molekülarten und deren Molzahlen eingetragen.

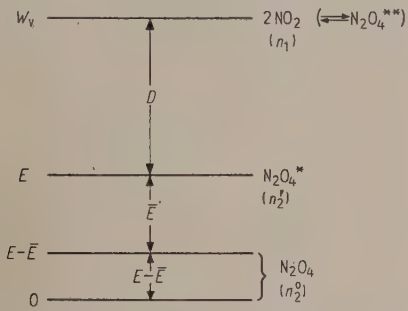


Bild 4. Energieniveaus (Energien pro Mol) und mögliche Übergänge des verwendeten N_2O_4 -Modells. In Klammern die Molzahlen der verschiedenen Anregungsstufen.

4. Die nicht durch (6 a) ausgedrückte Anregung der zur Dissoziation beitragenden Freiheitsgrade von 0 auf $E - \bar{E}$ sowie die Anregung der restlichen N_2O_4 - und der NO_2 -Schwingungsfreiheitsgrade soll einen additiven Beitrag zur Schallabsorption und -dispersion liefern. Diese Annahme wird unten begründet. Der additive Beitrag wird separat berechnet.

5. Die Beiträge der inneren Reibung, der Wärmeleitung und der Anregung der Rotationsfreiheitsgrade (von jetzt an klassischer Beitrag genannt) zur Absorption sind nach MEIXNER [34] ebenfalls in guter Näherung additiv in bezug auf jeden der vorhergenannten Absorptionsbeiträge. Dasselbe wird für die klassischen Dispersionsbeiträge angenommen.

6. Die auf $\beta_0 = \omega/c_0$ bezogene und durch die in den Voraussetzungen 1 bis 3 aufgezählten Ursachen zustande kommende Absorptions- bzw. Phasenkonstante sei α_1/β_0 bzw. β_1/β_0 , die Dispersion also $\Delta\beta_1/\beta_0$. Die in den Voraussetzungen 4 und 5 aufgezählten Beiträge zur Absorption bzw. Dispersion seien $\alpha_2/\beta_0, \alpha_3/\beta_0, \dots$ bzw. $\Delta\beta_2/\beta_0, \Delta\beta_3/\beta_0, \dots$. Die Addition zu den Gesamtkonstanten α_g/β_0 bzw. β_g/β_0 soll nach den Gleichungen

$$\frac{\alpha_g}{\beta_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_0} + \frac{\alpha_2}{\beta_0} + \dots$$
$$\frac{\beta_g}{\beta_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_0} \cdot \dots \quad (7)$$

erfolgen (siehe Voraussetzung 5 und GREENSPAN [35]).

7. Die Berechnung von α_g/β_0 und β_g/β_0 soll nur in dem f/p -Bereich durchgeführt werden, in dem die in den Voraussetzungen 1 und 3 aufgezählten Ursachen den Hauptbeitrag zur Absorption und Dispersion liefern.

3.2. Berechnung der Absorption und Dispersion, die durch die Reaktionen Gl. (6a) zustandekommt

Bei der Berechnung der Absorptionskonstante α_1 und der Phasenkonstante β_1 geht man zunächst von den ganz allgemein¹⁰ für nicht zu große Absorption gültigen Beziehungen

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\text{Im}(|\Delta p/\Delta q|)}{2 \text{Re}(|\Delta p/\Delta q|)}, \quad (8)$$

$$\beta_1 = \omega |\Delta p/\Delta q|^{-1/2} \quad (9)$$

aus, worin $\text{Im}(|\Delta p/\Delta q|)$ bzw. $\text{Re}(|\Delta p/\Delta q|)$ den Imaginär- bzw. Realteil von

$$\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{p}{q} \left[1 - \frac{\Delta(pv)}{p \Delta v} \right] \quad (10)$$

bedeuten. Für $\Delta(pv)$ erhält man¹⁰

$$\Delta(pv) = n R \Delta T - R T \Delta n_2, \quad (11)$$

wobei die für die Molzahlen n_1 bzw. n_2 des NO_2 bzw. des N_2O_4 gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= n, \\ \Delta n_1 + \Delta n_2 &= \Delta n, \\ n_1 + 2 n_2 &= \text{const.}, \\ \Delta n_1 + 2 \Delta n_2 &= 0 \end{aligned}$$

benutzt sind. Für $p \Delta v$ folgt unter Berücksichtigung der Voraussetzungen 1 bis 3 aus dem 1. Hauptsatz

$$\begin{aligned} -p \Delta v &= n c_v \Delta T + D/2 \cdot \Delta n_1 - E \Delta n_2^0 = \\ &= n c_v \Delta T - D \Delta n_2 - \bar{E} \Delta n_2^0. \end{aligned} \quad (12)$$

Hierbei soll die spezifische Wärme c_v den gesamten Translations-, Rotations- und Schwingungsanteil, aber nicht den Dissoziationsanteil des Gemischs umfassen (siehe Gl. (40))¹¹. KNESER und GAULER [8] verwendeten statt Gl. (12) die Gleichung

$$-p \Delta v = n c_v \Delta T - D \Delta n_2 + E \Delta n_2'.$$

Aus Gl. (11) und (12) folgt

$$-\frac{\Delta(pv)}{p \Delta v} = \frac{R \left(\Delta T - T \frac{\Delta n_2}{n} \right)}{c_v \Delta T - D \frac{\Delta n_2}{n} - \bar{E} \frac{\Delta n_2^0}{n}}. \quad (13)$$

¹⁰ Siehe z. B. EINSTEIN [4] sowie KNESER und GAULER [8].

¹¹ Der NO_2 -Schwingungsanteil dürfte eigentlich in dem interessierenden (in Voraussetzung 7 festgelegten) f/p -Bereich wegen der relativ großen Relaxationszeit der NO_2 -Schwingungsfreiheitsgrade (siehe Abschnitt 5) nur teilweise berücksichtigt werden. Wegen des überwiegenden Translations-, Rotations- und N_2O_4 -Schwingungsanteils (siehe Tabelle II) ist die erwähnte Berechnung von c_v jedoch zulässig.

Zur Berechnung von $\Delta n_2/n$ und $\Delta n_2^0/n$ müssen die Reaktionsgleichungen für die Dissoziation und die Anregung aufgestellt werden. Für die in (6a) rechts stehende Dissoziationsreaktion lautet die Reaktionsgleichung

$$k_2' n_2' - k_1'' \frac{n_1^2}{v} = \frac{1}{2} \frac{dn_1}{dt} = - \frac{dn_2}{dt}, \quad (14)$$

in der im Gegensatz zu Gl. (1) die Zahl der zerfallenden N_2O_4 -Moleküle proportional zur Zahl der angeregten Moleküle ist. Für den Gleichgewichtszustand folgt aus Gl. (14)

$$\frac{k_2'}{k_1''} = \frac{n_{10}^2}{v n_{20}} = \bar{K}_c. \quad (15)$$

Die Größe $k_2'/k_1'' = \bar{K}_c$ sei als Gleichgewichtskonstante zwischen den N_2O_4^* - und den NO_2 -Molekülen definiert. Es ist

$$\Delta \bar{K}_c = \bar{K}_c \left(\frac{\Delta k_2'}{k_2'} - \frac{\Delta k_1''}{k_1''} \right). \quad (16)$$

Mit der üblicherweise verwendeten Gleichgewichtskonstante¹² $K_c = n_{10}^2/v n_{20} = K_0 e^{-W_v/RT}$ besteht wegen Gl. (15) der Zusammenhang

$$\bar{K}_c = K_c \frac{n_{20}}{n_{20}'},$$

woraus wegen Gl. (3)

$$\bar{K}_c = K_0 g^{-1} e^{-D/RT}$$

und daraus

$$\Delta \bar{K}_c = \bar{K}_c \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{D}{RT} - \frac{dg}{dT} \right) \quad (17)$$

folgt.

Durch Differentiation von Gl. (14) erhält man, wenn man gleichzeitig bei Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit von n_2 für dn_2/dt den Wert $i \omega n_2$ setzt

$$\Delta k_2' n_2' + k_2' \Delta n_2' - \Delta k_1'' \frac{n_1^2}{v} - \quad (18)$$

$$- k_1'' \frac{2 n_1 \Delta n_1}{v} + k_1'' \frac{n_1^2}{v^2} \Delta v = -i \omega \Delta n_2.$$

Aus Gl. (18) folgt bei Berücksichtigung von Gl. (16) und $\bar{K}_c \approx n_1^2/v n_2'$ (siehe Gl. (15))

$$\Delta \bar{K}_c n_2' + \bar{K}_c \Delta n_2' - \Delta n_1 \frac{2 n_1}{v} + \frac{n_1^2}{v^2} \Delta v + i \omega \frac{\Delta n_2}{k_1''} = 0 \quad (19)$$

und daraus mit Gl. (17) und der Beziehung $\Delta n_1 = -2 \Delta n_2$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{D}{RT} - \frac{dg}{dT} \right) n_2 + \Delta n_2' \frac{n_2}{n_2'} + \\ + 4 \Delta n_2 \frac{n_2}{n_1} + n_2 \frac{\Delta v}{v} + i \omega \frac{n_2 \Delta n_2}{k_2' n_2} = 0. \end{aligned}$$

¹² Hier ist, im Gegensatz zu Gl. (2), die Temperaturabhängigkeit von W_v nicht berücksichtigt.

Führt man für $-p \Delta v = -n R T \Delta v/v$ die Gl. (12) sowie $\Delta n_2' = \Delta n_2 - \Delta n_2^0$ und

$$k_2' n_2' / n_2 = k_2'' \quad (20)$$

ein, so ergibt sich schließlich

$$\frac{\Delta T}{T} \left(\frac{D}{R T} - \frac{c_v}{R} - \frac{d g T}{d T g} \right) + \Delta n_2 \left(\frac{n_2}{n_2'} + 4 \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n} \frac{D}{R T} + \frac{i \omega}{k_2''} \right) + \Delta n_2^0 \left(\frac{n_2}{n} \frac{\bar{E}}{R T} - \frac{n_2}{n_2'} \right) = 0. \quad (21)$$

Für die Anregung der Schwingungsfreiheitsgrade nach der in (6a) links stehenden Reaktion gilt die Reaktionsgleichung

$$k' n_2^0 - k n_2' = -d n_2^0 / d t, \quad (22)$$

die keinen Zerfall unangeregter Moleküle zuläßt. Ganz analog wie Gl. (21) aus Gl. (14) folgt aus Gl. (22) durch Differentiation und Einführung von

$$K_1 = \frac{k'}{k} = \frac{n_{20}'}{n_{20}^0} = \frac{n_{20}' / n_{20}}{1 - n_{20}' / n_{20}} \quad \text{und} \quad \Delta K_1 = \left(\frac{n_{20}'}{n_{20}^0} \right)^2 \Delta \left(\frac{n_{20}'}{n_{20}} \right) \approx \left(\frac{n_2}{n_1} \right)_2 \Delta \left(\frac{n_{20}'}{n_{20}} \right) \quad (23), (24)$$

die Gleichung

$$-\Delta n_2 + \Delta n_2^0 (1 + K_1 + i \omega / k) + \frac{n_2^2}{n_2^0} \Delta \left(\frac{n_{20}'}{n_{20}} \right) = 0 \quad (25)$$

und mit Gl. (3) und (5)

$$\frac{\Delta T}{T} n_2 \Phi - \Delta n_2 + \Delta n_2^0 (1 + K_1 + i \omega / k) = 0. \quad (26)$$

Aus Gl. (21) und (26) kann man $\Delta n_2^0 / n$ und $\Delta n_2 / n$ zunächst unabhängig voneinander darstellen. Zum Beispiel ist

$$\frac{\Delta n_2^0}{n} = -\frac{\Delta T}{T} \frac{n_2}{n} \frac{Z}{R T} + (1 + K_1) \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} \right) + K_1 \frac{n_2}{n} \frac{D}{R T} - \frac{\omega^2}{k k_2''} + \frac{i \omega}{k} \left[\frac{1}{K_1} + 1 + 4 \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n} \frac{D}{R T} + \frac{k}{k_2'} (1 + K_1) \right]. \quad (27)$$

Entsprechend folgt für $\Delta n_2 / n$ aus Gl. (26) und (27) eine von $\Delta n_2^0 / n$ unabhängige Gleichung.

Setzt man $\Delta n_2 / n$ und $\Delta n_2^0 / n$ in Gl. (13) ein, so ergibt sich eine auch von ΔT unabhängige Darstellung. Ordnet man Zähler und Nenner nach Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\frac{\Delta(p v)}{p \Delta v} = \frac{A - R \frac{\omega^2}{k k_2''} + i \left[A \frac{\omega}{k} + R (1 + K_1) \frac{\omega}{k_2''} \right]}{B - c_v \frac{\omega^2}{k k_2''} + i \left(B \frac{\omega}{k} + C \frac{\omega}{k_2''} \right)} \quad (28)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{W_v + Z}{T} - c_v \right) \frac{n_2}{n} + R \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} \right) \right] (1 + K_1) - \frac{E}{T} \left(K_1 + \Phi \frac{n_2}{n} \right) \frac{n_2}{n}, \\ A &= \left(\frac{W_v + D}{T} - c_v \right) \frac{n_2}{n} + R \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} + \frac{1 - n_2 \Phi}{K_1} \right), \\ B &= \frac{W_v (Z + K_1 D)}{R T^2} \frac{n_2}{n} + c_v (1 + K_1) \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} \right) + \frac{\bar{E}}{T} \Phi \frac{n_2}{n} \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} \right), \\ B &= \frac{D W_v}{R T^2} \frac{n_2}{n} + c_v \left(1 + 4 \frac{n_2}{n_1} + \frac{1}{K_1} \right) - \frac{D \Phi}{T K_1} \frac{n_2}{n}, \quad C = c_v (1 + K_1) + \frac{\bar{E}}{T} \Phi \frac{n_2}{n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Als Funktion des Dissoziationsgrades α ist $\frac{n_2}{n} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$ und $1 + 4 \frac{n_2}{n_1} = \frac{2 - \alpha}{\alpha}$. Nunmehr können α_1 / β_1 und

β_1 aus Gl. (8) und (9) mit (10) und (28) berechnet werden:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\omega}{2} \frac{\left[\frac{A}{k} + \frac{R(1 + K_1)}{k_2''} \right] \left(B - c_v \frac{\omega^2}{k k_2''} \right) - \left(\frac{B}{k} + \frac{C}{k_2''} \right) \left(A - R \frac{\omega^2}{k k_2''} \right)}{\left[A + B - (R + c_v) \frac{\omega^2}{k k_2''} \right] \left(B - c_v \frac{\omega^2}{k k_2''} \right) + \left[\frac{A + B}{k} + \frac{R(1 + K_1) + C}{k_2''} \right] \left(\frac{B}{k} + \frac{C}{k_2''} \right) \omega^2}, \quad (30)$$

$$\beta_1 = \omega \left(\frac{p}{q} \right)^{-1/2} \left[\frac{\left[\frac{A + B - (R + c_v) \frac{\omega^2}{k k_2''}}{k k_2''} \right]^2 + \left\{ (A + B) \frac{\omega}{k} + [R(1 + K_1) + C] \frac{\omega}{k_2''} \right\}^2}{\left(B - c_v \frac{\omega^2}{k k_2''} \right)^2 + \left(B \frac{\omega}{k} + C \frac{\omega}{k_2''} \right)^2} \right]^{-1/4}. \quad (31)$$

Die für die Berechnung von α_g/β_0 und β_g/β_0 nach Gl. (7) wichtige Konstante $\beta_0 = \omega/c_0$ erhält man dann aus Gl. (31):

$$\beta_0 = \omega \left(\frac{p}{q} \frac{A+B}{B} \right)^{-1/2}. \quad (31a)$$

Mit Gl. (30) und (31) ist die Schallabsorption und -dispersion in dissoziierenden Gasen insoweit berechnet, wie sie durch die Dissoziation und durch die Anregung ganz bestimmter Schwingungsfreiheitsgrade verursacht wird. Bevor die weiteren, nach Voraussetzung 4 und 5 additiven Anteile der Absorption und Dispersion berechnet werden, seien einige Bemerkungen zu Gl. (30) und (31) gemacht.

Im Vergleich zur Theorie von KNESER und GAULER [8] enthalten die Gl. (30) und (31) als neuen Parameter die mittlere Anregungsenergie E der $N_2O_4^*$ -Moleküle. Die Größen K_1 und Φ lassen sich nach Gl. (4) und (5) aus E berechnen, ebenso \bar{E} , da $E - \bar{E}$ die mittlere thermische Energie der zur Dissoziation beitragenden sechs Schwingungsfreiheitsgrade des N_2O_4 ist.

Im allgemeinen hat die Funktion Gl. (30) zwei Maxima und Gl. (31) zwei Wendepunkte. Setzt man ¹³ $k < k_2''$ und berücksichtigt, daß für nicht zu große Dissoziationsgrade immer $A, A \gg R$ und $B, B \gg C, c_v$ ist, so kann man in Gl. (30) und (31) einige Glieder vernachlässigen. Mit guter Näherung folgt dann für $\omega^2 \approx k k_2''$, d. h. für die Umgebung des ersten (d. h. bei tieferen f/p -Werten liegenden) Maximums der Absorptionskurve aus Gl. (30) und für den ersten Teil der Dispersionskurve aus Gl. (31)

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\omega}{2k} \frac{BA - AB}{B(A+B) + \frac{\omega^2}{k^2} B(A+B)}, \quad (32)$$

$$\beta_1 = \omega \left[\frac{p^2}{q^2} \frac{(A+B)^2 + (A+B)^2 \omega^2/k^2}{B^2 + B^2 \frac{\omega^2}{k^2}} \right]^{-1/4} \quad (33)$$

und aus Gl. (32)

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)_{\max} = \frac{BA - AB}{4 \sqrt{B(A+B)B(A+B)}}, \quad (34)$$

$$\frac{\omega_{\max}}{k} = \sqrt{\frac{B(A+B)}{B(A+B)}}. \quad (35)$$

Entsprechend erhält man aus Gl. (30) und (31) für $\omega^2 \gg k k_2''$, d. h. für die Umgebung des zweiten Maximums der Absorptionskurve und für den zweiten Teil der Dispersionskurve,

¹³ Der Fall $k > k_2''$ kann im Fall des N_2O_4 ausgeschlossen werden; denn für diesen Fall folgen aus Gl. (30) — wie man durch numerische Auswertung feststellen kann — Absorptionswerte, die wesentlich über den Meßwerten liegen.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\omega}{2k_2''} \frac{BR - A c_v}{B(A+B) + \left(\frac{\omega}{k_2''} \right)^2 c_v (R + c_v)}, \quad (36)$$

$$\beta_1 = \omega \left[\frac{p^2}{q^2} \frac{(A+B)^2 + (R + c_v)^2 (\omega/k_2'')^2}{B^2 + c_v^2 (\omega/k_2'')^2} \right]^{-1/4}, \quad (37)$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)_{\max} = \frac{BR - A c_v}{4 \sqrt{B(A+B)c_v(R + c_v)}}, \quad (38)$$

$$\frac{\omega_{\max}}{k_2''} = \sqrt{\frac{B(A+B)}{c_v(R + c_v)}}. \quad (39)$$

Die Gl. (32) bis (39) haben die aus der Theorie der molekularen Schallabsorption und -dispersion bekannte Form.

Eine Zuordnung der beiden Maxima bzw. Dispersionsgebiete zum Dissoziations- und Anregungsvorgang ist nicht möglich, obwohl die Frequenzlage der beiden Maxima bzw. Dispersionsgebiete durch k und k_2'' bestimmt ist. Das liegt daran, daß sich Anregungs- und Dissoziationsvorgang gegenseitig beeinflussen.

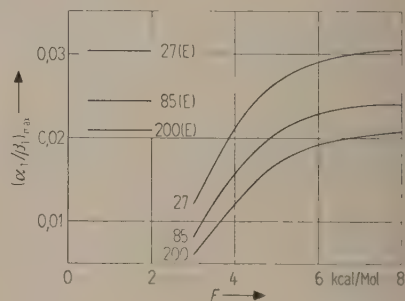


Bild 5. Rechts: Höhe des ersten durch Reaktion (6a) entstehenden Absorptionsmaximums in Abhängigkeit von der Anregungsenergie E des $N_2O_4^*$ -Moleküls für 27, 85 und 200 Torr bei 20°C. Links: Zum Vergleich die für dieselben Drucke aus Bild 1 entnommenen Absorptionsmaxima.

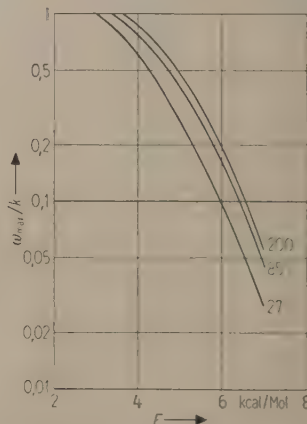


Bild 6. Verhältnis der Frequenz des bei Bild 5 beschriebenen Maximums zur Desaktivierungskonstante des $N_2O_4^*$ -Moleküls in Abhängigkeit von E für 27, 85 und 200 Torr bei 20°C.

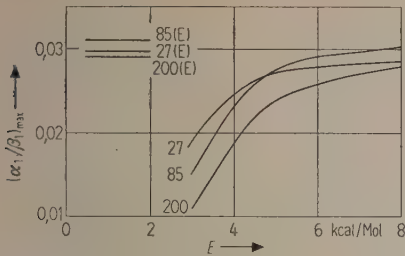


Bild 7. Wie Bild 5, jedoch für 53° C.

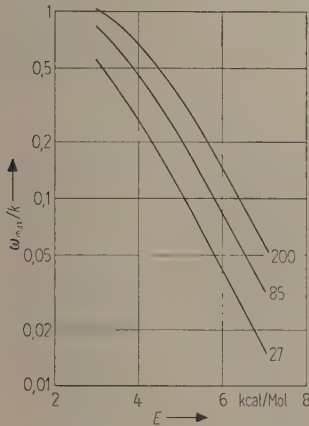


Bild 8. Wie Bild 6, jedoch für 53° C.

Ben wurde $E - E = 1 \text{ kcal/Mol}$ und $W_v = 13,7 \text{ kcal/Mol}$ gesetzt. K_1 und Φ sind mit den im Abschnitt 2 aufgestellten Gl. (4) und (5) berechnet bzw. aus Bild 3 entnommen. Die ebenfalls benötigte spezifische Wärme wurde aus den Angaben der Tabelle I berechnet. Dabei ist für das $\text{NO}_2 - \text{N}_2\text{O}_4$ -Gemisch

$$c_v = \frac{c_{vu} + \alpha(2c_{vd} - c_{vu})}{1 + \alpha} \tag{40}$$

In Tabelle II sind die c_v -Werte zusammengestellt. Der separat berechnete Anteil des 1. NO_2 -Freiheitsgrades wird unten gebraucht. Bild 9 zeigt den Verlauf von c_v für das Gemisch in Abhängigkeit von α .

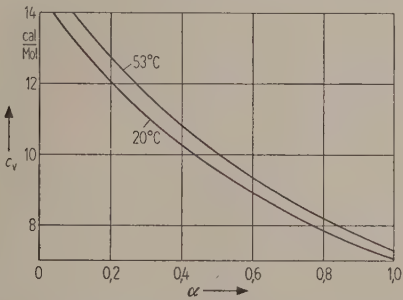


Bild 9. Spezifische Wärme der Translations-, Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade des $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ -Gemischs in Abhängigkeit vom Dissoziationsgrad.

Tabelle II. Spezifische Wärmen c_v in $\text{cal/Mol} \cdot \text{Grad}$.

| | NO ₂ | | | N ₂ O ₄ | | Gemisch |
|-------|---------------------------------|---------|--------|-------------------------------|--------|--|
| | Schwungsanteil Freiheitsgrad | | gesamt | Schwungs- anteil | gesamt | |
| | 1 | 2 und 3 | | | | |
| 20° C | 0,94 | 0,16 | 7,06 | 8,50 | 14,46 | $\frac{14,46 - 0,34 \alpha}{1 + \alpha}$ |
| 53° C | 1,07 | 0,26 | 7,29 | 9,50 | 15,46 | $\frac{15,46 - 0,88 \alpha}{1 + \alpha}$ |

Für die Interpretation der Meßergebnisse sind die aus Gl. (34) und (35) für den ersten Teil¹⁴ der Absorptionskurve folgenden Größen $(\alpha_1/\beta_1)_{\text{max}}$ und ω_{max}/k von Bedeutung. $(\alpha_1/\beta_1)_{\text{max}}$ und ω_{max}/k sind in den Bildern 5 und 6 für 20° C und in den Bildern 7 und 8 für 53° C in Abhängigkeit von E dargestellt. Parameter ist der Gasdruck, d. h. der Dissoziationsgrad α . Für die Berechnung dieser Grö-

¹⁴ Der zweite Teil liegt, wie man aus Gl. (35) und (39) abschätzen kann, auf der f/p -Skala für alle interessierenden Dissoziationsgrade um etwa zwei Größenordnungen höher. In diesem Bereich ist aber der Einfluß der klassischen Absorption und der durch Anregung der N_2O_4 -Schwingungsfreiheitsgrade verursachten Absorption so groß, daß wegen Voraussetzung 7 eine numerische Berechnung nicht durchgeführt werden soll.

Zum Vergleich sind in den Bildern 5 und 7 für dieselben Dissoziationsgrade auch die aus der Theorie von EINSTEIN [4] bzw. — bei Annahme sehr kleiner Relaxationszeiten der Schwingungsanregung — aus der Theorie von KNESER und GAULER [8] folgenden Absorptionswerte eingezeichnet, die Bild 1 entnommen sind.

3.3. Berechnung der Absorption und Dispersion, die durch in den Voraussetzungen 4 und 5 aufgezählte Ursachen zustandekommt

Der Beitrag der in Voraussetzung 4 aufgezählten, bis jetzt unberücksichtigt gebliebenen Schwingungsfreiheitsgrade zur Absorption und Dispersion kann als additiv betrachtet werden, da die Anregung dieser Freiheitsgrade nach Voraussetzung völlig unab-

hängig vom Dissoziationsvorgang erfolgen soll. Das ist nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen von KNESER und GAULER sowie zu den Gl. (30) und (31) dieser Arbeit; denn dort wurde jeweils eine starke Kopplung zwischen Dissoziations- und Anregungsvorgang durch die Forderung, daß nur Moleküle eines bestimmten Anregungszustandes zerfallen dürfen, vorausgesetzt.

Die Absorptions- und die Phasenkonstante durch Anregung eines einzelnen der in Voraussetzung 4 genannten Schwingungsfreiheitsgrade ist nach KNESER und GAULER [8]

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{2} \frac{R c_k \omega \tau_k}{c_v(c_v + R) + c_a(c_a + R) (\omega \tau_k)^2}, \quad (41)$$

$$\frac{\beta_k}{\beta_0} = \left[\frac{1 + (c_a/c_v)^2 (\omega \tau_k)^2}{1 + \left(\frac{R + c_a}{R + c_v} \right) (\omega \tau_k)^2} \right]^{1/4} \quad (42)$$

Dabei soll der Index $k=3, 4, 5, \dots$ irgendeine Numerierung der Freiheitsgrade angeben. c_k ist der Anteil der spezifischen Wärme des k -ten Freiheitsgrades an der spezifischen Wärme des NO_2 - N_2O_4 -Gemischs. Dementsprechend ist c_k für einen NO_2 - bzw. N_2O_4 -Freiheitsgrad wegen der relativen Anteile des NO_2 bzw. N_2O_4 am Gemisch das $\frac{2\alpha}{1+\alpha}$ - bzw. $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ -fache der für reines NO_2 bzw. N_2O_4 errechneten Werte.

c_a ist die spezifische Wärme der äußeren Freiheitsgrade; c_a setzt sich also aus den spezifischen Wärmen der Translations-, der Rotations- und aller derjenigen Schwingungsfreiheitsgrade zusammen, die wesentlich kürzere Relaxationszeit als der betrachtete haben. Außerdem liefern die Schwingungsfreiheitsgrade mit etwa derselben Relaxationszeit wie der betrachtete einen Beitrag zu c_a , der allerdings nur abgeschätzt werden kann. c_v ist $c_a + c_k$. Die Relaxationszeiten τ_k werden den Messungen entnommen (siehe Abschnitt 5). — Aus Gl. (41) und (42) erhält man dann die zur Berechnung von α_g/β_0 und β_g/β_0 nach Gl. (7) erforderlichen Größen α_k/β_0 und β_k/β_0 . — Für das Absorptionsmaximum folgt aus Gl. (41)

$$\left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)_{\max} = \frac{R c_k}{4 \sqrt{c_v c_a (c_v + R) (c_a + R)}}. \quad (43)$$

Der klassische Beitrag α_2/β_0 ist proportional zu f/p . Der Proportionalitätsfaktor wird im Abschnitt 5 aus den Meßergebnissen bestimmt. Der klassische Beitrag zur Dispersion ist unterhalb 10^8 Hz/atm zu vernachlässigen.

4. Experimentelles

Die Messung der Schallabsorption und der Schallgeschwindigkeit erfolgte mit einem Ultraschallinterferometer, in dem als Schallsender und als Schall-

empfänger elektrostatische Wandler mit festem Dielektrikum verwendet werden. Das Interferometer ist in [37] beschrieben. Es eignet sich für Messungen in einem weiten Temperaturbereich und ist in Gasen mit starker molekularer Absorption — wie z. B. N_2O_4 — bis zu relativ kleinen f/p -Werten (etwa 10^5 Hz/atm) brauchbar. Die Absorptions- und die Geschwindigkeitsmessungen erfolgten so, daß bei fester Frequenz und festem Druck die Empfängerspannung und -phase als Funktion der Entfernung zwischen Sender und Empfänger gemessen wurden. Daraus lassen sich bei bekannter Frequenz die Absorptions- und die Phasenkonstante bestimmen. Die Meßmethode ist in einer früheren Arbeit [36] genauer beschrieben.

Die korrodierenden, oxydierenden und giftigen Eigenschaften des Gases brachten einige Schwierigkeiten, vor allem bei der Vakuummessung, bei der Reinhaltung des Gases und bei der Auswahl geeigneter Folien für die elektrostatischen Wandler mit sich.

Zur Druckmessung diente ein Quecksilbermanometer mit sehr kleiner Quecksilberoberfläche, zur Messung des beim Spülen der Apparatur erreichten Endvakua wurde ein Kompressionsmanometer verwendet. Jedes Manometer war nur während der mit ihm durchgeführten Druckmessungen mit der übrigen Apparatur in Verbindung. Vorsichtshalber wurden die Manometer häufig mit neuem Quecksilber gefüllt.

Das Gas wurde durch Verdampfen eines flüssigen NO_2 - N_2O_4 -Gemischs erzeugt und hatte beim Einfüllen in die Apparatur einen Reinheitsgrad von 99,9%. Um Reduktion des Gases zu vermeiden, wurden die oxydierbaren Teile der Apparatur, soweit möglich, mit einer dünnen Schicht von Vakuumfett überzogen. Die Quecksilbermanometer waren durch Hähne im allgemeinen von der übrigen Apparatur getrennt. Die Apparatur wurde vor Beginn jeder Meßreihe mehrmals mit N_2O_4 von etwa 30 Torr gefüllt, und dann jeweils auf etwa 10^{-3} Torr ausgepumpt. Zur Trocknung des Gases wurde in der Apparatur eine Schale mit Phosphorpentoxyd aufgestellt. Wegen der starken Adsorption des Gases an den freien Metalloberflächen nahm der Druck in der Apparatur ständig langsam ab. Durch Nachfüllen aus einem Vorratsgefäß konnte er aber während der Messungen praktisch konstant gehalten werden. — Reproduzierbarkeitsmessungen zeigten, daß sich dank der erwähnten Maßnahmen die Zusammensetzung des Gases während der Dauer der mit einer Gasfüllung angestellten Versuchsreihen nicht merklich änderte, wenn der Gasdruck 10 Torr oder höher war. Dagegen entstanden bei 1 und 3 Torr Meßfehler durch Verunreinigungen des Gases (siehe untenstehende Fehlerabschätzung).

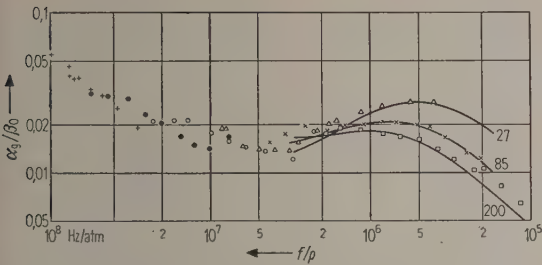


Bild 10. Schallabsorption in $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ bei 20°C . Nach Gl. (7) berechnete Kurven für 27, 85 und 200 Torr.

Meßpunkte:

- + Messungen bei 1 Torr,
- Messungen bei 3 Torr,
- Messungen bei 10 Torr,
- △ Messungen bei 27 Torr,
- × Messungen bei 85 Torr,
- Messungen bei 200 Torr.

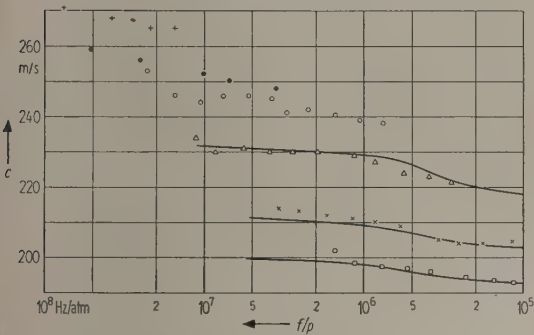


Bild 11. Schallgeschwindigkeit in $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ bei 20°C ; Zeichenerklärung siehe Bild 10.

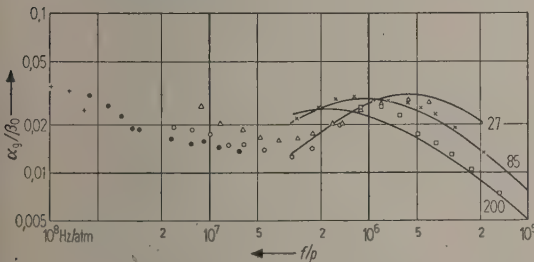


Bild 12. Schallabsorption in $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ bei 53°C ; Zeichenerklärung siehe Bild 10.

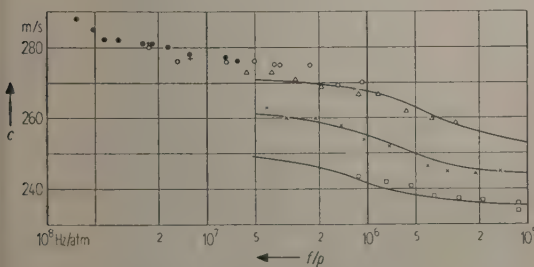


Bild 13. Schallgeschwindigkeit in $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ bei 53°C ; Zeichenerklärung siehe Bild 10.

Als geeignetste Folie für den Betrieb der elektrostatischen Wandler in $\text{NO}_2\text{-N}_2\text{O}_4$ stellte sich eine aluminiumbedampfte Styroflexfolie von etwa $10\ \mu\text{m}$ Dicke heraus.

Die Schallabsorption und Schallgeschwindigkeit in dissoziierendem N_2O_4 wurde bei 20°C und 53°C gemessen. Die Meßergebnisse sind, zusammen mit den theoretisch berechneten Kurven, in den Bildern 10 bis 13 dargestellt¹⁵. Gleich gezeichnete Meßpunkte in einem Bild sind bei konstantem Druck und konstanter Temperatur, also bei konstantem Dissoziationsgrad, gemessen und unterscheiden sich nur in der Frequenz. Die elektrostatischen Wandler mit festem Dielektrikum gestatten, die Meßfrequenz in einem weiten Bereich — im allgemeinen von 20 bis 500 kHz — zu verändern und dadurch bei konstantem Druck und konstantem Dissoziationsgrad weite f/p -Bereiche zu überstreichen. Durch diesen und die bekannten anderen Vorteile sind die elektrostatischen Wandler mit festem Dielektrikum für Schallausbreitungsmessungen in dissoziierenden Gasen allen anderen Wandlern überlegen.

Für die mittleren Fehler der Meßergebnisse sind neben den in [36] erwähnten Ursachen vor allem die Verunreinigungen des Gases maßgebend. Schon 1% Luftzusatz bewirkt eine Änderung der Schallgeschwindigkeit um mindestens 0,5% und der Schallabsorption um mindestens 1%. Verunreinigungen, welche die Relaxationszeiten verschieben, bedingen noch größere Fehler. Aus Reproduzierbarkeitsversuchen wurde für Frequenzen über 50 kHz als mittlerer Fehler der Einzelmessung bei hohen Drucken (10 bis 200 Torr) für die Absorptionsmessungen $\pm 5\%$ und für die Dispersionsmessungen $\pm 1,5\%$ bestimmt. Bei kleinen Drucken (1 und 3 Torr) lagen die entsprechenden Fehler bei $\pm 10\%$ bzw. $\pm 3\%$. Bei Frequenzen zwischen 20 und 50 kHz, bei denen Resonanzen der Wandler liegen, treten zusätzliche Fehler von maximal $\pm 5\%$ auf.

5. Deutung der Meßergebnisse durch die Theorie

Es ist von Vorteil, zunächst eine mehr qualitative Deutung der Meßergebnisse voranzustellen¹⁶. Diese stützt sich vor allem auf die Absorptionsmessungen, da die kleinen Dispersionsstufen wegen der Meßfehler nicht genügend getrennt werden können. — Die Messungen (Bilder 10 und 12) zeigen mindestens vier Absorptionsmaxima, von denen das ausgeprägteste, in Abhängigkeit vom Dissoziationsgrad wandernde und bei $0,5$ bis $2 \cdot 10^6\ \text{Hz/atm}$ liegende — der Reaktion (6 a) zuzuschreiben ist. Für diese Zuordnung spricht auch die Höhe des Maximums, da

¹⁵ Die Meßergebnisse wurden bereits in [38] veröffentlicht.

¹⁶ Siehe auch [38].

die NO_2 - und die N_2O_4 -Anregung¹⁷ nach den so gleich folgenden Abschätzungen zu wesentlich kleineren Maxima führt. Dagegen hat nach den Bildern 5 und 7 das erste Maximum¹⁸, das auf Grund der Reaktion (6 a) zu erwarten ist, etwa diese Höhe. — Ein zweites, wesentlich kleineres Maximum liegt in demselben f/p -Bereich. Es wächst mit zunehmendem Dissoziationsgrad, gehört also zum NO_2 ¹⁹. Tabelle III zeigt die nach Gl. (43) berechnete Höhe desjenigen Maximums, das durch Anregung des 1. NO_2 -Freiheitsgrades (siehe Tabelle II) entsteht. Die durch die anderen NO_2 -Freiheitsgrade verursachte Absorption ist gegenüber der Absorption durch Dissoziation zu vernachlässigen. — Die Relaxationszeit und damit die Lage des Maximums

Tabelle III. NO_2 -Absorptionsmaximum $(\alpha_3/\beta_0)_{\max}$.

| | 27 Torr | 85 Torr | 200 Torr |
|-------|---------|---------|----------|
| 20° C | 0,0043 | 0,0025 | 0,0016 |
| 53° C | 0,0080 | 0,0069 | 0,0053 |

wird unten bestimmt. — Bei $f/p > 10^7$ Hz/atm liegen einige weitere Maxima, die mit zunehmendem Dissoziationsgrad abnehmen und dementsprechend zum N_2O_4 gehören. Für die Gesamthöhe dieser Maxima ist in Tabelle IV eine obere Grenze berechnet. Dabei ist angenommen, daß alle N_2O_4 -Freiheitsgrade, also auch diejenigen, die zur Dissoziation beitragen, mitwirken und dieselbe Relaxationszeit haben. Diese Höhen entsprechen bei 20° C etwa den gemessenen Werten, vermindert um die klassischen Anteile. Bei 53° C liegen die Meßwerte höher²⁰. Deshalb treten wahrscheinlich bei entfernten f/p -Werten keine ins Gewicht fallenden N_2O_4 -Maxima mehr auf.

Die jetzt folgende quantitative Deutung beschränkt sich auf den f/p -Bereich, in dem die Dissoziation die wesentliche Rolle spielt.

Mit der Theorie von EINSTEIN [4] können die Meßergebnisse nicht befriedigend erklärt werden.

Tabelle V. Vergleich von $(\alpha/\beta)_{\max}$ nach EINSTEIN mit den Meßergebnissen. ($(\alpha/\beta)_{\max}$ ist Bild 1 entnommen.)

| | 20° C | | | 53° C | | |
|---------------------------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|
| p (Torr) | 27 | 85 | 200 | 27 | 85 | 200 |
| Diss.grad α | 0,635 | 0,42 | 0,29 | 0,93 | 0,84 | 0,705 |
| $(\alpha/\beta)_{\max}$ | 0,0305 | 0,0245 | 0,021 | 0,0295 | 0,031 | 0,029 |
| $(\alpha_e/\beta)_{\max}$ | 0,028 | 0,021 | 0,019 | 0,028 | 0,030 | 0,026 |

¹⁷ Die N_2O_4 -Anregung ist hier nur in dem durch die Voraussetzung 4 festgelegten Rahmen gemeint.

¹⁸ Hier kann es sich nur um das erste (bei tieferen f/p -Werten liegende) Absorptionsmaximum handeln, da nach den Messungen in [7], [9] und [10] unterhalb 10^5 Hz/atm keine nennenswerte Dispersion auftritt.

¹⁹ Wegen seiner Kleinheit äußert sich dieses Maximum nur in einer Verbreiterung des zuvor beschriebenen Maximums.

Zwar stimmen die Schallgeschwindigkeitswerte nach dieser Theorie mit den Meßergebnissen dann gut überein (Abweichungen $< 1\%$), wenn man die Schwingungsanregung²¹ außer acht läßt. Jedoch zeigt Tabelle V, daß die nach [4] zu erwartenden Höhen $(\alpha/\beta)_{\max}$ der Schallabsorptionsmaxima durch Dissoziation erheblich über den gemessenen Werten $(\alpha_e/\beta)_{\max}$ liegen, selbst wenn man von den gemessenen Werten die klassischen und die Anregungsanteile gar nicht abzieht.

Die Theorie von KNESER und GAULER [8], welche die Schwingungsanregung in den Ansätzen mitberücksichtigt, ergibt größere Dispersion und größere Absorption als die Theorie von EINSTEIN. Deshalb gibt [8] zwar die c_0 -Werte richtig wieder, alle anderen Schallgeschwindigkeits- und alle Schallabsorptionswerte liegen jedoch im Vergleich zu den Meßergebnissen wesentlich zu hoch.

Die Deutung der Meßergebnisse soll jetzt mit der im Abschnitt 3 entwickelten Theorie erfolgen²². Geht man auch hier von den Absorptionsmessungen aus, so müssen zunächst die nach Voraussetzung als additiv zu betrachtenden NO_2 -, N_2O_4 - und klassischen Anteile berechnet und von der Gesamtaborption subtrahiert werden. Aus dem sich dann ergebenden Anteil der Dissoziation (genauer: der Reaktion (6 a)) an der Absorption kann der neue unbekannte Parameter E ermittelt werden.

Tabelle IV. N_2O_4 -Absorptionsmaximum $(\alpha_4/\beta_0)_{\max}$.

| | 27 Torr | 85 Torr | 200 Torr |
|-------|---------|---------|----------|
| 20° C | 0,0150 | 0,0229 | 0,0275 |
| 53° C | 0,0034 | 0,0076 | 0,0134 |

Der klassische Anteil α_2/β_0 , der für den interessierenden f/p -Bereich zu f/p proportional ist, wird aus den Absorptionsmessungen mit $f/p > 6 \cdot 10^7$ Hz/atm, wo nur noch die klassische Absorption ins Gewicht fällt, bestimmt. α_2/β_0 soll nur von der Tempe-

²⁰ Hier könnte eventuell schon das durch Gl. (38) und (39) charakterisierte zweite Absorptionsmaximum der Reaktion (6 a) eine Rolle spielen (siehe auch Fußnote 14).

²¹ Eine additive Berücksichtigung der Schwingungsanregung wäre auch hier möglich.

²² Dabei soll, entsprechend der Voraussetzung 7 im Abschnitt 3, nur der f/p -Bereich, in dem die Reaktion (6 a) dominiert, also etwa 10^5 Hz/atm $< f/p < 3 \cdot 10^6$ Hz/atm, betrachtet werden.

ratur und nicht vom Dissoziationsgrad abhängen. Diese Näherung ist wegen der Kleinheit von α_2/β_0 zulässig.

Der N_2O_4 -Schwingungsanteil α_4/β_0 kann unterhalb $3 \cdot 10^6$ Hz/atm ebenfalls proportional zu f/p gesetzt werden, denn die Absorptionsmaxima liegen nach den qualitativen Betrachtungen oberhalb 10^7 Hz/atm. Der Proportionalitätsfaktor wird so gewählt, daß bei denjenigen Meßpunkten der 27-Torr-Meßreihe ($20^\circ C$), deren f/p -Wert größer als $5 \cdot 10^6$ Hz/atm ist, die Summe der N_2O_4 , der klassischen und der (für $f/p > 5 \cdot 10^6$ Hz/atm nicht mehr sehr ins Gewicht fallenden und daher leicht abschätzbaren) NO_2 - und Dissoziationsabsorption gleich der gemessenen Absorption ist. Dabei ergibt sich bei bekannter maximaler N_2O_4 -Absorption (siehe Tabelle IV) die Relaxationszeit der N_2O_4 -Schwingungsfreiheitsgrade. Da auch der N_2O_4 -Anteil unterhalb von $3 \cdot 10^6$ Hz/atm klein ist, kann die bei der Berechnung der Tabelle IV gemachte vereinfachende Annahme, daß alle N_2O_4 -Freiheitsgrade mitwirken, als zulässig betrachtet werden. Als gemeinsame Relaxationszeit dieser Freiheitsgrade folgt $\tau_{N_2O_4} = 6,3 \cdot 10^{-9}$ s für 1 atm und $20^\circ C$. Diese Relaxationszeit soll auch für $53^\circ C$ verwendet werden, womit der N_2O_4 -Anteil für alle Kurven festliegt.

Den Proportionalitätsfaktor M der Summe der beiden zu f/p proportionalen Anteile α_2/β_0 und α_4/β_0

$$(\alpha_2 + \alpha_4)/\beta_0 = M f/p \tag{44}$$

für alle interessierenden Meßreihen zeigt Tabelle VI.

Tabelle VI. Proportionalitätsfaktor M von Gl. (44).

| | 27 Torr | 83 Torr | 200 Torr | |
|--------------|---------|---------|----------|-----------------------------|
| $20^\circ C$ | 1,7 | 2,2 | 2,7 | $\frac{atm}{Hz} \cdot 10^9$ |
| $53^\circ C$ | 0,6 | 1,0 | 1,5 | $\frac{atm}{Hz} \cdot 10^9$ |

Subtrahiert man von den Meßwerten α_6/β_0 den Wert $M f/p$, so erhält man wegen Gl. (7) und Gl. (44) den Rest $(\alpha_1 + \alpha_3)/\beta_0$. Dieser Rest wird mit den Bildern 5 bis 8 sowie der Tabelle III gedeutet, d.h. k , E und τ_{NO_2} werden so gewählt, daß gute Übereinstimmung zwischen diesem Rest und der Summe aus Gl. (32) und der — auf den 1. Schwingungsfreiheitsgrad des NO_2 angewendeten — Gl.

Tabelle VII. Konstanten des Dissoziationsvorgangs und der Anregungsvorgänge.

| | E | k | τ_{NO_2} | $\tau_{N_2O_4}$ |
|--------------|---------|------------------|---------------------|---------------------|
| | cal/Mol | s^{-1} | s | s |
| $20^\circ C$ | 4500 | $8,5 \cdot 10^6$ | $5,3 \cdot 10^{-7}$ | $6,3 \cdot 10^{-9}$ |
| $53^\circ C$ | 4500 | $2,4 \cdot 10^7$ | $5,3 \cdot 10^{-7}$ | $6,3 \cdot 10^{-9}$ |

(41) für alle Meßwerte unterhalb $3 \cdot 10^6$ Hz/atm besteht. Die sich ergebenden Werte für k , E und τ_{NO_2} zeigt Tabelle VII. E scheint temperaturunabhängig zu sein. Die Temperaturabhängigkeit von τ_{NO_2} , die zwischen $20^\circ C$ und $53^\circ C$ keinen sehr großen Einfluß haben kann, läßt sich wegen der Kleinheit des NO_2 -Schwingungsbeitrags nicht bestimmen. Deshalb wird τ_{NO_2} , ebenso wie $\tau_{N_2O_4}$, als temperaturunabhängig angenommen.

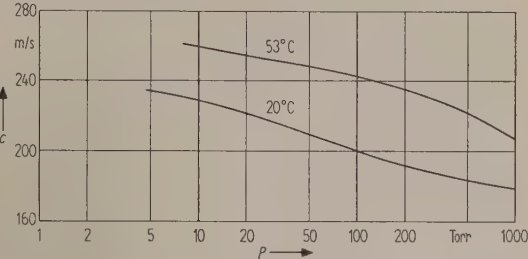


Bild 14 Berechnete Schallgeschwindigkeit bei kleinen f/p -Werten in Abhängigkeit vom Druck.

Die Geschwindigkeitskonstante k_2 der Gesamtreaktion (6 a) wird folgendermaßen aus der oben (siehe Tabelle VII) bestimmten Konstante k berechnet: Aus Gl. (14) und (22) sowie den Beziehungen $n_2 = n_2^0 + n_2'$ und $dn_2'/dt = 0$ folgt bei Vernachlässigung von k' gegenüber k

$$\frac{k' k_2'}{k + k_2'} n_2 - \frac{k k_1''}{k + k_2'} \frac{n_1^2}{v} = - \frac{dn_2}{dt}$$

Durch Vergleich mit Gl. (1) erhält man daraus sofort

$$k_2 = \frac{k' k_2'}{k + k_2'} \tag{45}$$

Nach Fußnote 13 und nach Gl. (20) ist aber $k < k_2'' = k_2' \cdot n_2'/n_2$. Wegen $n_2'/n_2 \ll 1$ folgt daraus $k \ll k_2'$ und damit aus Gl. (45)

$$k_2 \approx k'$$

als Gesamtgeschwindigkeitskonstante des N_2O_4 -Zerfalls. In Tabelle VIII werden die für $k' = K_1 k$ (mit Hilfe von Tabelle VII und Bild 3) ermittelten Werte mit den von anderen Autoren gemessenen k_2 -Werten verglichen.

Als Aktivierungsenergie der in (6 a) links stehenden N_2O_4 -Anregung berechnet sich aus der Temperaturabhängigkeit von k' der Wert 9,5 kcal/Mol. Die Anregungsenergie für diesen Vorgang ist nach Tabelle VII $E = 4,5$ kcal/Mol. Die Aktivierungsenergie des in (6 a) rechts stehenden N_2O_4 -Zerfalls kann aus den Messungen nicht bestimmt werden, da dazu die Kenntnis von k_2' und dessen Temperaturabhängigkeit erforderlich wäre. Nach Gl. (39) ist zwar k_2' mit dem zweiten durch die Reaktion (6 a) entstehenden Absorptionsmaximum verknüpft. Dieses

Tabelle VIII. Geschwindigkeitskonstante k_2 des N_2O_4 -Zerfalls²³ (bei 1 atm, falls nicht anders erwähnt).

| | k' dieser Arbeit | RICHARDS und REID [7] | BRASS und TOLMAN [25] | CARRINGTON und DAVIDSON [13] | BAUER und GUSTAVSON [14] |
|-------|--------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| 20° C | $1,7 \cdot 10^5$ | $0,53 \cdot 10^5$ * | $0,82 \cdot 10^{5**}$ | $0,53 \cdot 10^{5***}$ | $4,5 \cdot 10^{5***}$ |
| 53° C | $8,4 \cdot 10^5$ | | | $3,8 \cdot 10^{5***}$ | |

* Bei 260 Torr und 25° C.

** Bei 25° C.

*** In N_2 mit etwa 1% N_2O_4 -Zusatz.

Maximum ist aber (siehe Fußnote 14) nicht mehr genügend genau zu lokalisieren.

Die mit den Werten der Tabellen VI und VII berechnete Gesamtabsorption und Schallgeschwindigkeit ist in den Bildern 10 bis 13 mit den Meßergebnissen verglichen. Die Abweichungen der Meßpunkte von den berechneten Kurven sind im allgemeinen gering. Der Mittelwert der Beträge dieser Abweichungen ist bei den Absorptionsmessungen 6%, bei den Dispersionsmessungen 1,2%. Diese Werte stimmen etwa mit den im Abschnitt 4 berechneten Meßfehlern überein. Die Meßergebnisse bestätigen also die Theorie auf beste.

In Bild 14 ist c_0 nach der Theorie (berechnet aus Gl. (31 a)) in Abhängigkeit vom Druck bei 20° C und 53° C aufgetragen. Die Bilder 11 und 13 zeigen, daß in allen nachprüfbaren Fällen (nämlich bei 27, 85 und 200 Torr) die experimentellen und die theoretischen c_0 -Werte sehr gut übereinstimmen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. Dr.-Ing. E. h. E. MEYER für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge danken. Ihm und den Herren Prof. Dr. W. JOST, Prof. Dr. K. TAMM und Dr. M. EIGEN danke ich für anregende Diskussionen. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützte die Arbeit in dankenswerter Weise durch eine Sachbeihilfe.

(Eingegangen am 30. April 1959.)

Zusammenstellung der benutzten Symbole

| | |
|----------------------|--|
| $D = W_v - E$, | |
| E | Anregungsenergie der Schwingungsfreiheitsgrade, |
| E | Anregungsenergie E vermindert um mittlere thermische Energie dieser Freiheitsgrade, |
| K_c, K_1, K_c, K_p | Gleichgewichtskonstanten, |
| R | Gaskonstante, |
| T | absolute Temperatur, |
| W_v | Wärmetönung der Reaktion $N_2O_4 \rightleftharpoons 2 NO_2$ bei konstantem Volumen, |
| $Z = D + E$, | |
| c | Schallgeschwindigkeit, |
| c_0 | Schallgeschwindigkeit bei niedrigen f/p -Werten, |
| c_a | spezifische Wärme der äußeren Freiheitsgrade bei konstantem Volumen, |
| c_k | spezifische Wärme der einzelnen NO_2 - und N_2O_4 -Schwingungsfreiheitsgrade bei konstantem Volumen, |
| c_v | gesamte spezifische Wärme des $NO_2 - N_2O_4$ -Gemisches bei konstantem Volumen, |

²³ Siehe auch Abschnitt 2.

| | |
|---|---|
| c_{vu} | gesamte spezifische Wärme des N_2O_4 bei konstantem Volumen, |
| c_{vd} | gesamte spezifische Wärme des NO_2 bei konstantem Volumen, |
| f | Frequenz, |
| g | Abkürzung, definiert in Gl. (3 a), |
| $i = \sqrt{-1}$, | |
| $k, k', k_1', k_2', k_1, k_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ | Geschwindigkeitskonstanten, definiert in Gl. (6), |
| k_1'' | Geschwindigkeitskonstante, definiert in Gl. (6 a), |
| k_2'' | Geschwindigkeitskonstante, definiert in Gl. (20), |
| n | Gesamtanzahl aller NO_2 - und N_2O_4 -Moleküle, |
| n_1 | Molzahl aller NO_2 -Moleküle, |
| n_2 | Molzahl aller N_2O_4 -Moleküle, |
| n_2' | Molzahl der $N_2O_4^*$ -Moleküle, |
| $n_2^0 = n_2 - n_2'$, | |
| $n_{20}, n_{20}', n_{20}^0$ | Gleichgewichtswerte von n_2, n_2', n_2^0 , |
| p | Gasdruck, |
| t | Zeit, |
| v | Volumen, |
| α | Dissoziationsgrad, |
| $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ | Absorptionskonstanten, auf die Amplitude bezogen, |
| $\beta = 2\pi/\lambda$ | Phasenkonstante, |
| $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$, | |
| β_1, β_2, \dots | Phasenkonstanten, |
| λ | Wellenlänge, |
| λ_0 | Wellenlänge bei niedrigen f/p -Werten (vor Einsetzen der Dispersion), |
| ν | Schwingungszahl, |
| ρ | Dichte, |
| $\tau, \tau_{NO_2}, \tau_{N_2O_4}$ | Relaxationszeiten, |
| $\omega = 2\pi f$ | Kreisfrequenz, |
| Θ | Debye-Temperatur, |
| Φ | Abkürzung, definiert in Gl. (5). |

Schrifttum

- [1] KEUTEL, F., Inaugural Dissertation, Berlin 1910.
- [2] SELLE, H., Z. phys. Chem. **104** [1923], 1–9.
- [3] GRÜNEISEN, E. und GOENS, E., Ann. Phys. (Lpz.) **72** [1923], 193–220.
- [4] EINSTEIN, A., Sitz.-Ber. Berlin. Akad. Wiss. 1920, 380–385.
- [5] LUCK, D. G. C., Phys. Rev. (II) **40** [1932], 440–444.
- [6] KNESER, H. O., Ergeb. exakt. Naturwiss. **22** [1949], 121–185.
- [7] RICHARDS, W. T. und REID, J. A., J. chem. Phys. **1** [1933], 114–128, 737–748.
- [8] KNESER, H. O. und GAULER, O., Phys. Z. **37** [1936], 677–684.
- [9] KISTIAKOWSKY, G. B. und RICHARDS, W. T., J. Amer. Chem. Soc. **52** [1930], 4661–4671.
- [10] TEETER, C. E., J. chem. Phys. **1** [1933], 251–265.
- [11] DAMKÖHLER, G., Z. Elektrochem. **48** [1942], 62–82, 116–131.

- [12] MEIXNER, J., Ann. Phys. (Lpz.) (5) **43** [1943], 244–270, 470–487.
- [13] CARRINGTON, T. und DAVIDSON, N., J. chem. Phys. **19** [1951], 1313; J. phys. Chem. **57** [1953], 418–427.
- [14] BAUER, S. H. und GUSTAVSON, M. R., Discuss. Farad. Soc. **17** [1954], 69–90.
- [15] BAUER, S. H., J. Phys. Chem. **57** [1953], 424–427.
- [16] FREEDMAN, E., J. chem. Phys. **21** [1953], 1784–1790.
- [17] MANES, M., J. chem. Phys. **21** [1953], 1791–1796.
- [18] TABUCHI, D., J. chem. Phys. **23** [1955], 2033–2037; **26** [1957], 993–1001.
- [19] BEYER, R. T., J. acoust. Soc. Amer. **29** [1957], 243–248.
- [20] SCHREBER, K., Z. Phys. Chem. **24** [1897], 651–665.
- [21] BODENSTEIN, M., Z. Phys. Chem. **100** [1922], 68–123.
- [22] VERHOEK, F. H. und DANIELS, F., J. Amer. Chem. Soc. **53** [1931], 1186, 1250–1263.
- [23] GIAUQUE, W. F. und KEMP, J. D., J. chem. Phys. **6** [1938], 40–52.
- [24] BRASS, P. D. und TOLMAN, R. C., J. Amer. Chem. Soc. **54** [1932], 1003–1020.
- [25] HAVEN, Y., Discuss. Farad. Soc. **17** [1954], 109–111.
- [26] KASSEL, L. S., The kinetics of homogenous gas reactions, New York 1932.
- [27] SLATER, N. B., Proc. Roy. Soc. A **194** [1948], 112–131; Phil. Trans. Roy. Soc. London A **246** [1953], 57–80.
- [28] SLATER, N. B., Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **64** [1955], 161–174; Proc. Leeds Phil. Lit. Soc. **6** [1959], 259–267.
- [29] SUTHERLAND, G. B. B. M., Proc. Roy. Soc. London **141** [1933], 342–362.
- [30] HARRIS, L. und KING, G. W., J. chem. Phys. **2** [1934], 51–57.
- [31] GRAY, P. und YOFFE, A. D., Chem. Rev. **55** [1955], 1069–1154.
- [32] SUTHERLAND, G. B. B. M., Proc. Roy. Soc. London **145** [1934], 278–287.
- [33] WILSON, M. K., Phys. Rev. **76** [1949], 472–473.
- [34] MEIXNER, J., Acustica **2** [1952], 101–109.
- [35] GREENSPAN, M., J. acoust. Soc. Amer. **26** [1954], 70–73.
- [36] MEYER, E. und SESSLER, G., Z. Phys. **149** [1957], 15–39.
- [37] SESSLER, G., Acustica **8** [1958], 395–397.
- [38] SESSLER, G., Acustica **9** [1959], 119–120.

Buchbesprechung

W. REHWALD, Elementare Einführung in die Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1959, 44 Seiten, 19 Bilder, 17 cm × 24 cm, kartoniert (Cellophan) DM 6,30.

Der Verfasser des vorliegenden Büchleins hat sich die Aufgabe gestellt, dem Studierenden der Nachrichtentechnik, der sehr bald mit Problemen in Berührung kommt, die auf Zylinderfunktionen führen, die Scheu vor diesen Funktionen zu nehmen und ihm in leicht verständlicher Form das mathematische Rüstzeug zum Umgang mit ihnen zu vermitteln. Durch Gegenüberstellung der elementaren Kreisfunktionen mit den Besselfunktionen werden die gemeinsamen Eigenschaften und Unterschiede beider Funktionenklassen klar herausgestellt.

Ohne Beweis, aber mit Literaturhinweisen werden die Zusammenhänge zwischen den Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen angegeben. Es werden behandelt: die Zylinderfunktionen mit reellem Argument, mit imaginärem Argument, mit Argumenten der Form $r\sqrt{\pm j}$, mit beliebigem komplexem Argument und mit halbzahligen Index. Die Besselfunktionen höherer Ordnung werden im Zusammenhang mit den Spektren frequenzmodulierter Schwingungen diskutiert. Es werden eine Reihe von asymptotischen Darstellungen für große und kleine Argumentwerte angegeben, darunter auch eine vom Verfasser selbst gefundene, die im Bereich $0 \leq |z| < 4$ für $J_0(z)$ und $J_1(z)$ gute Werte liefert. Das kleine Werk kann jedem, der sich mit Problemen der Zylinderfunktionen zu befassen hat, empfohlen werden.

W. KALLENBACH

SOUND REINFORCEMENT AT THE SIDNEY MYER MUSIC BOWL, MELBOURNE, AUSTRALIA

by R. W. MUNCEY and A. F. B. NICKSON

Division of Building Research, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia

Summary

The Sidney Myer Music Bowl is an outdoor auditorium for speech, music and drama. It is unique in that the main structure or "canopy" covers both the stage and 2 000 fixed seats, an area about one eighth of the bowl proper. The ground under the canopy was excavated to depths of up to 10 m and this allows an audience of 30 000 to view the entire stage. Overflow audiences of two or three times this number can listen in areas out of sight of the stage.

The paper describes the sound reinforcement system and some measurements of reverberation time, transmission characteristics, pulse response and insulation from unwanted noise. Subjective impressions as reported of music critics and others are included.

Sommaire

Le «Sydney Myer Music Bowl» est un auditorium de plein air pour la parole, la musique et le drame. Il est unique du fait que sa partie principale, c'est-à-dire la «voute» couvre à la fois la scène et 2 000 sièges fixes, représentant une surface d'environ le huitième de l'ensemble de l'auditorium. Le sol sous la voute a été creusé jusqu'à une profondeur de 10 m et cela permet à un auditoire de 30 000 personnes de voir toute la scène. Des auditoires de 2 à 3 fois plus nombreux peuvent entendre dans des emplacements ne jouissant pas de la vue de la scène. La communication décrit le système d'amplification du son et diverses mesures de temps de réverbération, des réponses relatives à des pulsations et l'isolation vis à vis des bruits indésirables.

On y a joint des impressions subjectives de critiques musicaux et autres.

Zusammenfassung

Die „Sydney Myer Music Bowl“ ist eine Freiluftbühne für Sprache, Musik und Theater. Sie ist insofern einzigartig, als das Hauptdach sowohl die Bühne als auch 2 000 Sitzplätze überdeckt, d. h. etwa ein Achtel der gesamten Fläche der Bowl. Unter diesem Dach wurde der Boden bis zu einer Tiefe von 10 m ausgehoben, dadurch können nun etwa 30 000 Zuschauer die gesamte Bühne übersehen. Die zwei- oder dreifache Zuhörerschaft kann den Darbietungen akustisch folgen, ohne jedoch die Bühne zu sehen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Schallübertragungsanlage, Messungen der Nachhallzeiten, Übertragungscharakteristiken (auch für Impulse) und die Schallisolation gegen Störgeräusche beschrieben. Äußerungen über subjektive Eindrücke von Musikkritikern und anderen Personen werden zitiert.

1. Introduction

The Sidney Myer Music Bowl is a unique building, situated in the King's Domain, Melbourne, for the outdoor presentation of music, speech and drama. The site is not a natural amphitheatre and, being close to the City, is subject to traffic noise from two main avenues, one of which carries electric trams, and from electric trains in a nearby railway yard. The effects of this noise were reduced by excavating 30 000 m³ of earth to a maximum depth of 10 m over a triangular area of 12 000 m². The stage, which is 33 m wide and 21 m deep, is placed in the deeper end of the excavation, and an artificial amphitheatre was created by banking the removed earth on either side of the hollow and arranging a

gradual rise, of about 1 in 10 with increasing width, from the stage area to the original ground level about 130 m away. A canopy of 0.013 m plywood sheathed with aluminium on both faces protects the stage and the 2000 seated members of the audience, covering about one eighth of the whole area intended for listeners. The canopy covers the stage in a shallow arch which rises in a length of 45 m from 7.3 m above the back of the stage to 23 m above the back row of seats under the leading edge of the roof. It is supported in this position by a main cable, the ends of which are anchored in the ground on either side of two masts, 23 m high and 43 m apart, which support the edge. Longitudinal cables fastened at one end to the main cable are anchored to a block at the back of the stage. Transverse cables are fasten-



Fig. 1. A view of the Sidney Myer Music Bowl, Melbourne.

ed at each end to a long anchor strip on either side of the excavation, so that a half-cone-like structure having a widely flared opening is produced. Fig. 1 shows a photograph of the Bowl and Figs. 2 and 3 show the general plan and elevation.

2. Acoustic design

The shape and acoustic design of the Bowl were developed by the architects in conjunction with their acoustic consultants — Bolt, Beranek and Newman Inc. It was the responsibility of the authors to advise how sound reinforcement methods could best be applied so that a very large area of outdoor ground could be adequately covered.

The desirable requirements for a reinforcement system would be perfect intelligibility for speech, as the whole interest of lecture and dramatic presentations depends on this, and a satisfactory presentation of music under conditions that should not be expected to duplicate the acoustics of the concert hall, however faithful the reinforcement outdoors might be. As there is nothing like the Sidney Myer Music Bowl elsewhere in the world it was not easy to decide the most suitable manner for providing the reinforcement. From simple principles it would seem that listeners under the canopy would be unlikely to require any strengthening of sound for orchestral or band music, although it is very likely that some would be desirable for an actor, soloist or public speaker, as the large stage area does not provide any reflecting surfaces close to the source

of sound. The shape of the canopy suggests that sound may be reflected well to persons sitting outside, provided that they are not too far away and thereby where they would have to combat the noise from external traffic. If considerable sound is radiated outward there may be little reverberant sound beneath the canopy. Outside the canopy the music could be expected to be loud, the loudness decreasing with distance in such a way that reinforcement would be desirable for music but essential for speech.

A simple experiment was carried out with a one-fiftieth scale model to determine whether sound at a listening position at the back of the seating area would be received by several different paths from the stage. At one point seven such paths could be located. These consisted of the direct path, three approximately equal that would introduce a time delay of 35 ms, two approximately equal producing a delay of 100 ms and one about 145 ms. As the time-interval separations were such that the ear might detect these arrivals as distinct sensations rather than combine them as reverberation, sounds with similar delays and amplitudes were set on a tape delay mechanism. However, listening to the combined output produced an undoubted suggestion of reverberation.

Calculation of the reverberation time of the volume under the canopy, assuming the open mouth as being completely absorbent, suggests a reverberation time of 1.7 s.

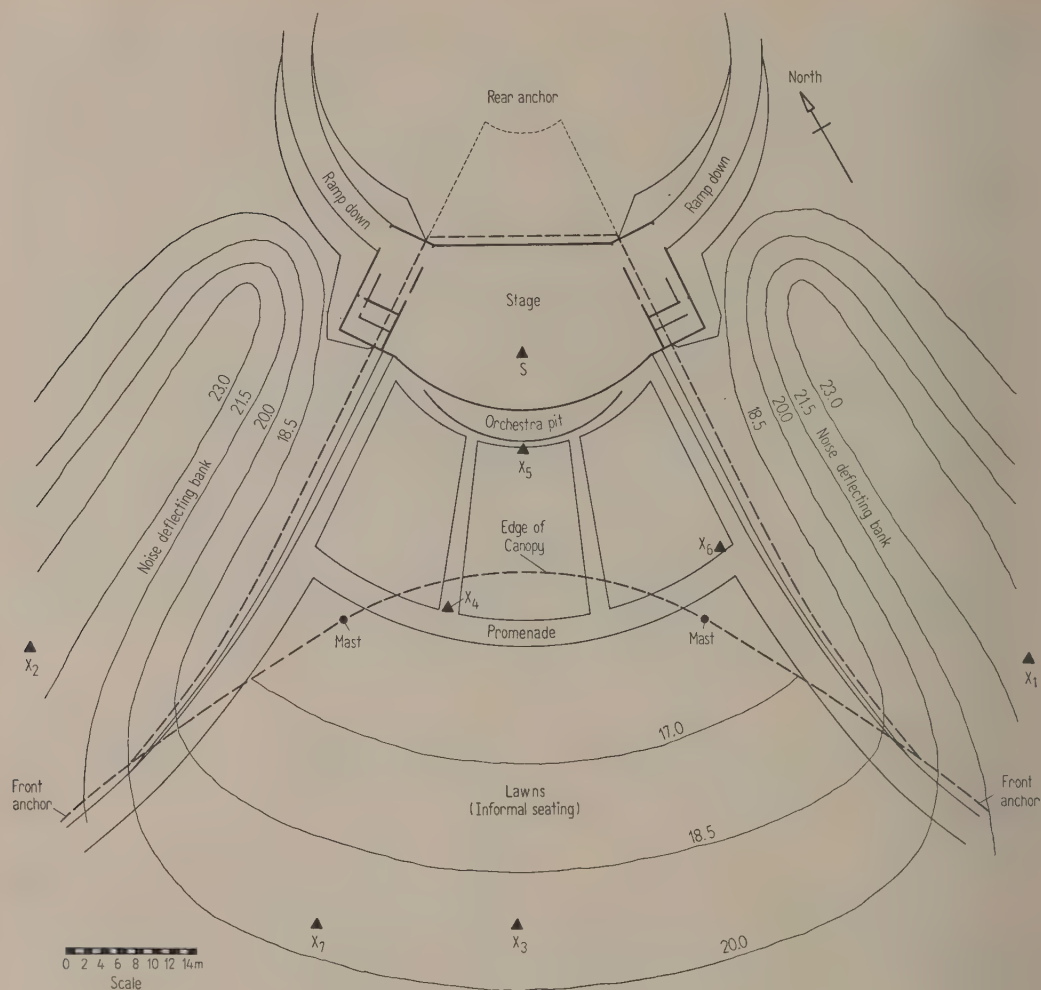


Fig. 2. General plan of the site of the Bowl.

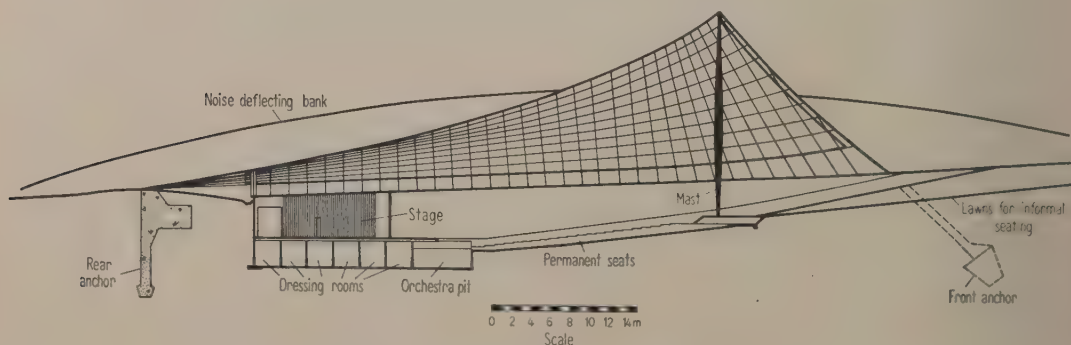


Fig. 3. Longitudinal section through the Bowl.

3. Design of sound reinforcement system

Previous experience with the use of loudspeaker columns suggested to the authors that similar methods could be used to cover the large outdoor area

and, separately, the covered area. A theoretical weakness with speaker columns is the narrowing of the fan of radiation in both vertical and horizontal planes as the frequency increases. This can be minimized in practice by limiting the horizontal width

of area to be covered by any single column, and by curving the column slightly to give a small included angle between the ends of the column, this angle becoming a limiting value in the vertical plane [1]. The use of twin-cone speakers also helps in these matters and in preserving a more uniform frequency response.

The difference in the requirements of the outer and inner areas means that separate column systems would be needed. As the columns for the outdoor area are nearer to the audience than the original source of sound, it was essential to use a time delay system to prevent echo effects and to ensure that the source of sound appears to be at the stage and not at the loudspeakers themselves.

The reinforcement system suggested by the authors can be considered therefore as having two parts, the indoor and the outdoor. The former consists of two columns, one on each side of the stage, which are by architectural requirements set 29 m apart, almost at roof height above the edge of the stage. They are tilted from the vertical, and turned across the seated area so that the centre of the back seats receives sound from both. Each column contains five speakers with 0.30 m cone diameter on 0.35 m centres, and the two columns are connected in parallel.

Three loudspeaker columns are used to cover the large open area. Two of these, each using twelve speakers with 0.30 m cone diameter on 0.35 m centres, are placed about 55 m apart and 4 m behind the line joining the masts, with the top of each column close to the roof. These columns are curved, the centre being 0.11 m in front of the line joining the ends to give an included angle of 12° . Because of the normal slope upward of the grassed area out of the Bowl these columns hang almost vertically. The columns are turned outwards (about 10°) from the centre line, as the width of the open area greatly increases with distance from the stage.

To ensure adequate sound coverage of the area between the two columns immediately in front of the canopy, a third column of six speakers similar to those already described is hung centrally between the two masts. It is tilted considerably more than the long columns, and it also is curved to bring its centre 0.11 m in front of the line joining the two ends of the columns, to give an included angle of 24° .

The three outdoor speaker columns just described are connected together electrically and obtain sound from a magnetic drum delay unit, which is adjusted to ensure that no sound is heard from these columns before it should be heard from the stage. Path length differences suggest that 90 ms is the order of delay required.

To assist an operator of the sound reinforcement system to obtain satisfactory control of the outside

columns, a control point is permanently available on the slope, and the sound level of the speakers can be adjusted from there during a programme. With correct adjustment it is possible to walk from inside the canopy, out beneath the high columns at the mouth of the canopy, and then up the slope without being able to detect any change in the source position, or a very noticeable change in intensity.

4. Objective measurements

An investigation of the acoustic properties of the Bowl was made with measurements of the reverberation time, the frequency characteristics, pulse picture response and of the insulation from unwanted noise given by the earth banks built up on either side of the Bowl. Measurements were made at the several positions shown in the plan (Fig. 2); these may be briefly described as follows:

- X₁ On east embankment overlooking distant noise sources.
- X₂ On west embankment overlooking distant noise sources.
- X₃ Control point for loudspeakers covering outdoor area.
- X₄ In line with back row of seats at end of west aisle.
- X₅ Centre of first row of seats, in front of stage.
- X₆ On centre line, 600 m from stage (not shown in Fig. 2).
- X₇ 23 m west of control point X₃.
- X₈ Seat X 83 at rear of seating area.

The loudspeaker system used as a sound source for the measurements consisted of four speakers 0.31 m cone diameter placed symmetrically around the centre of a baffle 1.22 m square. It was placed centrally on the floor of the stage at point S, 12.6 m from the back wall, and the microphone for the sound reinforcement system was placed 4.7 m in front of the speaker source. The polar characteristic of the microphone was cardioid with a front-to-back ratio of 9 dB. All measurements were made in the absence of an audience.

(i) Measurement of reverberation times

The sound source produced warble tones, varying at the rate of 8 c/s about a range of $\pm 10\%$ of the centre frequency. The decay of sound was registered graphically on a high speed level recorder. Three decays were recorded at octave intervals of 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 and 6400 c/s, for each position of the microphone. For some positions comparison measurements were made with the sound reinforcement system on and off. The level pro-

Table I. Reverberation times.

| Site | X ₃ | | X ₅ | X ₆ | X ₇ | X ₈ | |
|---------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| Reinforcement | on | off | off | on | on | on | off |
| Frequency | | | | | | | |
| 100 c/s | 1.3 s | — | 1.3 s | 1.1 s | 2.1 s | 1.6 s | — |
| 200 c/s | 2.8 s | 1.1 s | 1.4 s | 4.7 s | 2.9 s | 1.8 s | 1.8 s |
| 400 c/s | 1.6 s | 1.2 s | 1.5 s | 1.7 s | 1.5 s | 2.4 s | 1.7 s |
| 800 c/s | 1.7 s | 1.7 s | 1.5 s | 1.9 s | 1.5 s | 1.8 s | 1.8 s |
| 1600 c/s | 1.5 s | 1.4 s | 1.3 s | 1.5 s | 1.6 s | 2.0 s | 1.8 s |
| 3200 c/s | 1.3 s | 1.3 s | 1.6 s | 1.3 s | 1.5 s | 1.6 s | 1.4 s |
| 6400 c/s | — | — | — | 1.2 s | 1.0 s | 1.6 s | 1.7 s |

duced by the sound source was sufficiently great to allow the reinforcement system to be operated at a gain setting at least 16 dB below that required to sustain electro acoustic feedback. The values observed are summarized as shown in Table I.

(ii) Transmission characteristic curves

The sound source produced warble tones, varying at the rate of 8 c/s over a range approximately $\pm 10\%$ of the nominal frequency, from 100 to 6400 c/s. The output of the source was held constant by using a microphone close to the source to provide a compression voltage to control the output of the oscillator feeding the speaker system. A graphical record of the variations in sound pressure level at four positions around the Bowl was obtained, and each record was used to provide a smoothed curve of the frequency transmission. The range was swept from 100 to 6400 c/s in 280 s and the microphone recorded the total sound level, that is the sound received directly from the stage by reflection from the canopy and by means of the sound reinforcement system. The records are shown in Fig. 4.

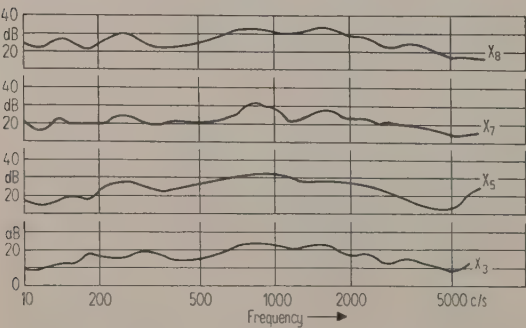


Fig. 4. Frequency response curves at four positions.

(iii) Pulse photographs

Photographic records were made of the sound received when pulses of 8 ms duration of various frequencies were transmitted from the speaker source on the stage to various positions around the Bowl, both with and without the sound reinforcement sys-

tem in use. The pictures were photographed on a base of 300 ms but the time of arrival of the first pulse was also measured on this base, so that an average record was considerably less than this.

(iv) Noise reduction of the protective banks

Comparative noise level measurements were made using a second microphone amplifier and graphic recorder to register simultaneously the noise levels from a reference microphone placed on the top of each protective bank overlooking the external sources of noise and a microphone at one of several points previously defined. The values obtained are shown in Table II.

5. Discussion of the measurements

It is difficult to give a simple yet conclusive description of the acoustics of the Sidney Myer Music Bowl on the basis of the results obtained from the objective measurements just described. However, a discussion of the results obtained from each group of measurements does bring out some of the important characteristics of the acoustics.

(i) The measurements of reverberation time show clearly that the acoustic conditions are far removed from "open air conditions", in which the absence of reverberation causes music to sound thin and unbalanced. It is interesting to note that the volume contained under the canopy has been calculated as 23 000 m³, for which size the suggested reverberation time for an auditorium suitable for speech and music is about 1.6 to 1.8 s. The measured values are close to this range and do not vary greatly from position to position. There is a slight rise in reverberation time at low frequencies and this is only to be expected, as no sound absorbing treatments have been used. It is noteworthy that some uniform well-modulated decays of 30 and 40 dB, which were as good as any obtained in an enclosed hall, were recorded but many decays were not uniform and quite difficult to measure. Most decays showed the first 10 dB (120 ms) or so being

rapid and in keeping with the model ray-tracing predictions mentioned earlier. It is possible that this form of decay, which is to be expected at the front of an enclosed hall, plays an important part in characterising the sound heard at the Bowl, where the subjective impression is one of adequate reverberation together with good definition.

Considerable care was taken to ensure that the sound reinforcement amplifiers were not overloaded, as the peak limiting circuits had a decay time of their own. It can be seen from Table I that there is a slight lengthening of reverberation time at points X_3 and X_8 (an average increase of 10 per cent) when amplification is used. Subjectively this increase is unlikely to be detectable unless an immediate comparison could be made. The long reverberation times for points X_3 , X_6 and X_7 at 200 c/s may be due to amplifier overloading, in spite of the care taken to prevent this. It is also apparent that the reverberation time does not vary greatly from place to place over the whole area of the Bowl. The decrease in reverberation times at high frequencies is a natural result of air absorption, as the volume under the canopy is large.

(ii) The frequency transmission characteristic curves all show a slight rise in the frequency range of 500 to 2000 c/s. This rise is hardly perceptible in practice, and is possibly made more apparent by the use of a single microphone at the objective measuring points as opposed to the averaging effect of two ears. The curves show that the frequency response is reasonably even from low to high frequencies, and not very different at each of the four positions. Subjectively, it is apparent when walking over the Bowl area that the frequency response is good, that there is no very obvious frequency discrimination, and that there are no sharp changes in response from one position to another.

Table II. Noise levels.

| Position | Scale weighting | Level at position | Level at reference X_1 | Difference |
|----------|-----------------|--------------------------|--------------------------|------------|
| | | dB | dB | dB |
| X_3 | linear | 65.5 | 74.6 | 9.1 |
| | 60–130 dB | 56.5 | 68.8 | 12.3 |
| X_4 | linear | 62 | 74.5 | 12.5 |
| | 60–130 dB | 60 | 71.5 | 11.5 |
| X_5 | linear | 62 | 74.5 | 12.5 |
| | 60–130 dB | 54 | 69 | 15.0 |
| | | Level at reference X_2 | | |
| X_3 | linear | 63 | 69.5 | 6.5 |
| | 60–130 dB | 53.5 | 62.7 | 9.2 |
| X_4 | linear | 60.5 | 69.7 | 9.2 |
| | 60–130 dB | 56.5 | 63 | 6.5 |
| X_5 | linear | 61.5 | 70 | 8.5 |
| | 60–130 dB | 62 | 63.9 | 3.9 |

(iii) The pulse photographs are very detailed, without providing much useful information. They show that there are multiple paths by which the sound is received from the source, and these undoubtedly contribute to the reverberation that was measured. The other fact that the pictures show is that there are no long delayed pulses of large magnitude that might give rise to echoes. Subjectively, no troublesome echoes have been detected around the Bowl area.

(iv) The measured isolation provided by each built up bank is noticeably different. The effective height of the bank on the east side is considerably greater than that on the west, as the land falls sharply towards the sources of noise, dropping 14 m down a slope 60 m long. On the west side the drop is only 4.5 m for the same length of slope. The figures in Table II show 12.5 dB difference for the east bank and 8.5 dB for the west bank at position X_5 . The actual shielding given by the west bank may be greater than these figures suggest, as on the day of measurement the predominant noise was coming from the east. The canopy acts as a sound collector for some traffic noises that pass into the Bowl between the further ends of the embankments. However, it is sufficient to say that for most purposes the external noises are unimportant under the canopy over the seated area, and are not troublesome in the open when the reinforcement system is operating, providing that the distance to the stage is less than about 140 m. A possible exception might be the use of a microphone on the stage to pick up sound for broadcasting purposes, as the flat response of the microphone at low frequencies is not a help in rejecting interfering noise.

6. Subjective impressions

From the opening night the acoustical quality of the Bowl and its sound reinforcement system have been accepted as very satisfactory. The opening occasions were two orchestral concerts given by a combined orchestra of 150 players conducted by Mr. A. WALLENSTEIN, the conductor of the orchestra at the Hollywood Bowl, Los Angeles, U.S.A. Each concert took place before 30 000 people who were keenly enthusiastic about the results achieved in presenting the concert to such a large number of persons. The music critics were very pleased with the acoustics. One critic said, "The largest audience I have ever seen at a symphony concert listened to what was by far the finest example of outdoor am-

plified music yet heard in Melbourne. There was an element of magic about the experience of walking on the outskirts of the audience and hearing in every detail the transparent orchestration of the music from Bizet's "Carmen" and then looking down into the luminous vastness of the Bowl to find that this astonishingly clear sound came from an ant-sized orchestra in the distance. This is clearly a notable—and rare—achievement in acoustic design". Another said, "We took our place for the first half in the very front row. After interval we went out and enjoyed the music stretched out comfortably on the grass. Acoustics seemed even better out here. We came away convinced that last night was certainly a night to remember, and that the Sidney Myer Music Bowl is going to be a terrific asset to this city". The conductor, Mr. WALLENSTEIN, said, "Melbourne and Australia should be very proud of the Sidney Myer Music Bowl. It is beautiful and acoustically perfect. I enjoyed conducting here". Observers from the Acoustics Section of the Division of Building Research moved among the audience on the occasions just described and were agreed that the results produced by the Bowl and its sound reinforcement system left little to be desired. Subsequent use of the Bowl for public meetings, music and opera, shows that it satisfies the requirements by providing for audiences of up to 65 000 people—the largest audience to date.

One acoustic criticism has been voiced by some of the orchestra players concerning the difficulty of hearing the players immediately in front of them. This is undoubtedly the result of the large stage area of 510 m². This is five times larger than the stage in the Melbourne Town Hall, which is commonly used for orchestral concerts conducted by world celebrities. This difficulty is accentuated as the orchestra is grouped near the front of the stage for the best visual presentation to the audience. This places the players well away from any stage surfaces that could give rise to the very desirable short path inter reflections among the orchestra; these reflections assist the players to keep in time and the conductor to achieve a good ensemble effect. With an orchestral grouping similar to that used on the stage at the Melbourne Town Hall the nearest vertical reflecting surfaces are 12 m away, while the ceiling shape curves in such a manner as to send sound out into the Bowl so that although the roof is only 9 m away not much sound is reflected back to the orchestra. This problem could be overcome by

using a special canopy or reflector over the orchestra, but such a device would need to be designed so that it does not destroy the visual impression that the architect has set out to create.

7. Conclusions

There can be little doubt that the Sidney Myer Music Bowl satisfies the aims of the donors who wished to provide a proper orchestral shell for the presentation of free outdoor concerts of the highest possible standards. It certainly satisfies the requirements of the listeners as expressed by one music critic who wrote that the Bowl has given Melbourne a finer means of popular music-making than it has ever had before. Two months after the opening, the manager of the Bowl Trust wrote, "We have had nothing but favourable comments on the acoustics of the Music Bowl, and the success of the installation must be most gratifying to all concerned". The imagination of the architect has provided a structure that is quite original in its conception, fits in well with its garden surroundings, and has satisfactory acoustics. The good acoustic results can be attributed to the presence of reverberation which is so vital to music but is often missing in outdoor concerts, to the reasonably smooth and wide frequency range of the high-quality electronic equipment with its associated time-delay drum, and to the use of loudspeaker columns which permit a uniform distribution of sound over the whole area of the Bowl.

Acknowledgments

The authors wish to record the pleasure it has been to work with the architects—Messrs. YUNCKEN, FREEMAN BROS., GRIFFITHS and SIMPSON, and in particular with Mr. B. B. PATTEN, the partner in charge of the project. The understanding shown by Mr. PATTEN about the various acoustic problems has largely contributed to the success of the Sidney Myer Music Bowl.

The recognized success of the sound reinforcing system is the practical result of the assistance given by Messrs. LUIJTEN and McCRAE of Philips Electrical Industries Pty. Ltd., who were responsible for supplying the necessary electronic and acoustic equipment.

(Received July 29th, 1959.)

References

- [1] WOLFF, I. and MALTER, L., J. acoust. Soc. Amer. **2** [1930], 201.

SCHWINGUNGEN DES ISOTROPEN KREISZYLINDERS MIT VERSCHWINDENDER AXIALKOMPONENTE

von H. BÖHME, E. FROMM und E. SITTIG

I. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Stuttgart

Zusammenfassung

Es wird eine Klasse von elastischen Resonanzen des isotropen Kreiszylinders beschrieben, bei denen die Axialkomponente der Bewegung verschwindet. Sie werden durch zwei ganze Zahlen (n, p) indiziert. Die Serie $(n, 1)$ entartet mit wachsendem n zu Oberflächenwellen mit zur Achse parallelen Wellenfronten.

Messungen an Glas- und Aluminiumzylindern bestätigen die Ergebnisse der Theorie. Die von BERGMANN aufgenommenen spannungsoptischen Bilder können im Rahmen dieser Theorie prinzipiell gedeutet werden.

Summary

Resonances of a type of elastic vibration in isotropic circular cylinders having vanishing axial component of motion are described. They are characterised by an index consisting of two integral numbers (n, p) . The series $(n, 1)$ degenerates with increasing n into surface waves with wave fronts parallel to the axis.

Measurements on glass and aluminium cylinders have confirmed the theoretical results which may also be used to interpret in principle BERGMANN's photoelastic pictures.

Sommaire

On décrit une classe de résonances élastiques des cylindres circulaires isotropes pour lesquelles la composante axiale du mouvement disparaît. Elles sont caractérisées par deux nombres entiers (n, p) . La série $(n, 1)$ dégénère lorsque n croît jusqu'à des ondes de surfaces dont le front d'onde est parallèle à l'axe.

Des mesures sur des cylindres de verre et d'aluminium confirment les résultats de la théorie. Les images obtenues par BERGMANN à l'aide des tensions optiques peuvent entrer dans le cadre de cette théorie.

1. Einleitung

Die Methode, die elastischen Konstanten eines isotropen Festkörpers an kreiszylindrischen Probestäben durch Bestimmung der geometrischen Abmessungen und der Frequenzen der Torsions- und Longitudinalschwingungen zu ermitteln, stößt trotz ihrer experimentell bestehenden Einfachheit auf erhebliche Schwierigkeiten bei ihrer mathematischen Ausarbeitung. Im Rahmen der elementaren Theorie ist das Problem bekanntlich einfach zu behandeln: Es bezeichne E den Youngschen Elastizitätsmodul, G den Torsionsmodul, ϱ die Dichte des Probestabs, L seine Länge; der Durchmesser D sei zu vernachlässigen. Dann ergeben sich die Phasengeschwindigkeiten der Torsions- bzw. Dehnungswelle zu

$$v_T = (G/\varrho)^{1/2}, \quad v_D = (E/\varrho)^{1/2}. \quad (1)$$

Die Randbedingungen der kräftefreien Oberfläche liefern die Resonanzbedingung für die Wellenlänge λ :

$$\lambda = 2L/q \quad (q = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

wobei dann q experimentell als Zahl der zur Achse senkrechten Knotenebenen der Bewegung bestimmt werden kann. Mit der Beziehung

$$v = f\lambda \quad (3)$$

ist schließlich der Zusammenhang zwischen den ela-

stischen Daten und den gemessenen Größen f , L , ϱ vollständig.

Für die dünne Scheibe, bei der definitionsgemäß $D \gg L$ sei, ergibt ein analoges Verfahren

$$v_T = \left(\frac{G}{\varrho}\right)^{1/2}, \quad v_L = v_D \left[\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right]^{1/2}, \quad (4)$$

wobei σ die Poissonsche Querkontraktionszahl

$$\sigma = \frac{E}{2G} - 1 \quad (5)$$

bedeutet. Im realisierbaren Bereich $0 < \sigma < 0,5$ ist also immer $v_L > v_D$.

Erfahrungsgemäß ist der Übergang zwischen beiden Grenzfällen, dessen Realisierung beim Zylinder durch wachsenden Axialindex q bis zum Bereich $\lambda \ll D$ naheliegt, nicht monoton. Vielmehr nimmt die Phasengeschwindigkeit der Dehnungswelle ab, wenn die zugehörige Wellenlänge abnimmt. Die hier weiterführende mathematische Behandlung des Problems durch Einführung harmonischer Lösungen in die elastische Grundgleichung des isotropen Festkörpers für den Verschiebungsvektor \vec{s}

$$\partial^2 \vec{s} / \partial t^2 = v_L^2 \text{grad div } \vec{s} - v_T^2 \text{rot rot } \vec{s} \quad (6)$$

— erstmals von POCHHAMMER [1] durchgeführt — liefert nur Näherungen für $D \ll L$, weil sie nicht er-

laubt, sämtliche Spannungen an der Oberfläche zum Verschwinden zu bringen. Wegen der Einzelheiten sei auf die Arbeiten [2], [3] und die dort genannten Autoren verwiesen.

Diese Theorie liefert eine dreifach abzählbare Folge von Resonanzen, die durch Tripel ganzer Zahlen (n, p, q) indiziert werden. Experimentell findet man n als Zahl der die Achse enthaltenden Knotenebenen der Schwingung, p ergibt sich aus der Zahl der zur Achse konzentrischen Knotenzylinder und q — wie oben — als Zahl der zur Achse senkrechten Knotenebenen. Auch Resonanzen mit $q=0$, also $\lambda=\infty$, existieren jetzt. Für diese verschwindet die Axialkomponente des Verschiebungsvektors. Sie seien im folgenden mit „Azimutal-Radial-Schwingungen“ bezeichnet. Dieser Schwingungstyp existiert auch bei der dünnen Scheibe und man kann nun untersuchen, welche Unterschiede sich zwischen den Fällen $D \ll L$ (Zylinder großer Länge) und $D \gg L$ (Scheibe) ergeben.

2. Theoretische Ergebnisse

Nach [2] lautet die Bestimmungsgleichung für die Azimutal-Radial-Frequenzen des Zylinders (7)

$$\begin{vmatrix} n^2 - 1 - (y^2/2) & 2(n^2 - 1)[\Theta_n(y) - n] - y^2 \\ \Theta_n(\alpha y) - n - 1 & 2n^2 - 2[\Theta_n(y) - n] - y^2 \end{vmatrix} = 0$$

mit den Abkürzungen (J_n Besselfunktionen)

$$y = \frac{D}{2} \frac{\omega}{v_T}, \quad \Theta_n(y) = \frac{y J_{n-1}(y)}{J_n(y)}.$$

$$\alpha^2 = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}. \quad (8)$$

Die entsprechende Gleichung der Scheibe erhält man, wenn α durch eine Größe β ersetzt wird, die durch

$$\beta^2 = \frac{1 - \sigma}{2} \quad (9)$$

definiert ist. Gl. (7) liefert eine zweifach abzählbare Folge von Lösungswerten $y_{np}(\sigma)$. Für $n=0$ zerfällt Gl. (7) in zwei Faktoren, deren einer eine reine Torsionsbewegung, deren anderer eine reine Radialbewegung liefert. In Analogie zu der Indizierung der allgemeinen Resonanzen in [2] sei also $n=T$ und $n=L$ statt $n=0$ geschrieben. Die niedrigsten Lösungswerte zeigt Tabelle I. Da für den Spezialfall $n=T$ die Theorie streng gilt — hier werden alle Randbedingungen erfüllt —, stimmen die Lösungen für Zylinder und Scheibe überein.

Aus den in der Arbeit [2] abgeleiteten Gl. (22) und (23) folgt für die Komponenten u_r , u_φ , u_z des in Zylinderkoordinaten r, φ, z geschriebenen Verschiebungsvektors \vec{s}

$$u_r = C \left[-A'' \frac{\partial J_n(\alpha y r/a)}{\partial r} + n \frac{J_n(y r/a)}{r} \right] \times \\ \times \cos n \varphi \cos \omega t \equiv U(r/a) \cos n \varphi \cos \omega t,$$

$$u_\varphi = C \left[n A'' \frac{J_n(\alpha y r/a)}{r} - \frac{\partial J_n(y r/a)}{\partial r} \right] \times \sin n \varphi \cos \omega t \equiv V(r/a) \sin n \varphi \cos \omega t, \\ u_z = 0.$$

Hierin ist C ein Amplitudenfaktor, $a = D/2$ und

$$A'' = \frac{\begin{vmatrix} 2(n^2 - 1)[\Theta_n(y) - n] - y^2 & n^2 - 1 - y^2 \\ 2n^2 - 2[\Theta_n(y) - n] - y^2 & \Theta_n(y) - n - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n^2 - 1 - (y^2/2) & n^2 - 1 - y^2 \\ \Theta_n(\alpha y) - n - 1 & \Theta_n(y) - n - 1 \end{vmatrix}}. \quad (11)$$

Setzt man hierin die Lösungswerte der Gl. (7), welche aus Tabelle I zu entnehmen sind, ein, so erhält man für $U(r/a)$ die in den Bildern 1 und 2 wiedergegebenen Abhängigkeiten.

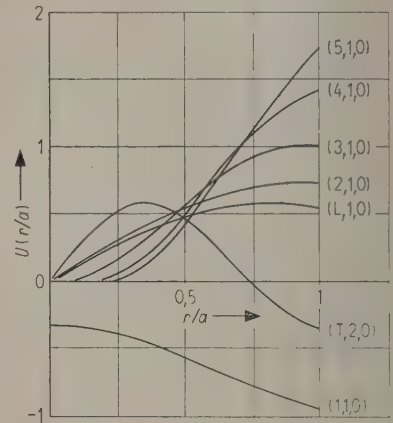


Bild 1. Querverteilung der Radialkomponente der Azimutal-Radialresonanzen für $\sigma=0,4$.

Charakteristisch ist der sich in Bild 1 andeutende Übergang zur Oberflächenwelle mit wachsendem n . Bezeichnet $\lambda_n = \pi D/n$ formal die Resonanzwellenlänge einer um den Zylindermantel herumlaufenden Welle mit Wellenfronten parallel zur Achse, so zeigt VIKTOROV [4], daß sich deren Phasengeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda_n = y_{n,1} \frac{v_T}{n} \quad (12)$$

mit wachsendem n monoton der Phasengeschwindigkeit v_R der Rayleighschen Oberflächenwellen [5] nähert. Dies ist auch anschaulich zu erwarten.

Die nächsthöheren Lösungswerte der Gl. (7), sinngemäß mit $p=2, 3, \dots$ indiziert, zeigt Tabelle II. Die Amplitudenverteilungen weisen für diese einen weiteren Knotenzylinder konzentrisch zur Achse auf.

Man entnimmt den Tabellen I und II im übrigen die Tatsache, daß die gleichindizierten Eigenfrequenzen der Scheibe immer tiefer liegen, als die des Zylinders unendlicher Länge. Mithin steht zu erwarten, daß die Werte für den Zylinder endlicher Länge zwischen beiden liegen.

Tabelle I.
y-Werte für den Zylinder.

| n | $\sigma = 0$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|-------|--------------|--------|--------|--------|--------|----------|
| 0 (T) | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 |
| 0 (L) | 2,6038 | 2,8850 | 3,2940 | 3,9769 | 5,5189 | ∞ |
| 1 | 2,4744 | 2,5827 | 2,6978 | 2,8171 | 2,9371 | 3,0542 |
| 2 | 2,3362 | 2,3405 | 2,3445 | 2,3479 | 2,3511 | 2,3539 |
| 3 | 3,5452 | 3,5717 | 3,5946 | 3,6145 | 3,6319 | 3,6471 |
| 4 | 4,5708 | 4,6262 | 4,6751 | 4,7179 | 4,7553 | 4,7880 |
| 5 | 5,5288 | 5,6125 | 5,6875 | 5,7539 | 5,8125 | 5,8639 |

y-Werte für die Scheibe.

| n | $\sigma = 0$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|-------|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 (T) | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 | 5,1358 |
| 0 (L) | 2,6038 | 2,8553 | 3,1376 | 3,4632 | 3,8508 | 4,3317 |
| 1 | 2,4744 | 2,5727 | 2,6588 | 2,7341 | 2,7999 | 2,8572 |
| 2 | 2,3362 | 2,3402 | 2,3432 | 2,3456 | 2,3475 | 2,3490 |
| 3 | 3,5452 | 3,5694 | 3,5873 | 3,6010 | 3,6119 | 3,6206 |
| 4 | 4,5708 | 4,6215 | 4,6595 | 4,6889 | 4,7122 | 4,7310 |
| 5 | 5,5238 | 5,6052 | 5,6634 | 5,7088 | 5,7449 | 5,7743 |

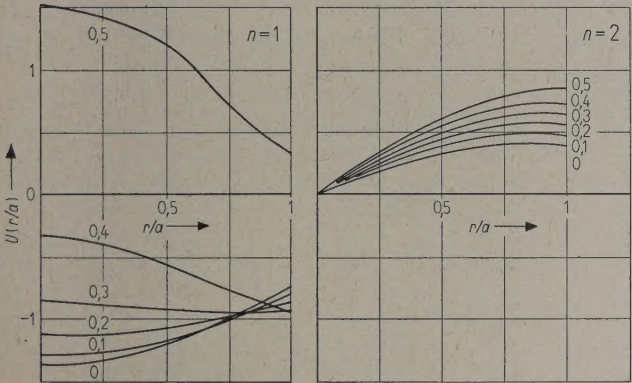


Bild 2. Amplitude der Radialkomponente für die Resonanzen (1, 1, 0) und (2, 1, 0); Parameter σ .

3. Experimentelle Methode

Mit der in [3] beschriebenen Meßapparatur wurden Stäbe aus einer Aluminiumlegierung ($\sigma = 0,42$) und Glas ($\sigma = 0,22$) untersucht. Die dort erwähnten elektrostatischen Abtaster wurden durch piezoelektrische ersetzt, bei denen die Selektivität für die Radialkomponente so gesteigert werden konnte, daß die Empfindlichkeit für diese etwa 50 dB über der für die Azimutal- bzw. Axialkomponente lag.

Die Konstruktion der Abtaster zeigt im einzelnen Bild 3. Ein Abtaststift A von 2 mm Durchmesser, der gleitend in einer Bohrung des Gehäuses B gelagert ist, überträgt die Schwingungsamplitude auf einen Bariumtitanat-Dickenschwinger C. Dieser sitzt in einem Isolierstück D. Die ganze Mikrofonkapsel ist mit einer aus Blattfedern E bestehenden Parallelführung federnd im Schlittenkopf F gelagert. Ein abgeschirmtes Kabel G verbindet das Mikrophon mit dem Eingangsverstärker der elektronischen Apparatur.

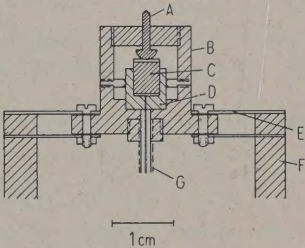


Bild 3. Piezoelektrischer Abtaster für die Schwingungsamplitude:
A Abtaststift, B Gehäuse, C Bariumtitanatzylinder, D Isolierfassung hierzu, E Blattfederaufhängung, F Schlittenoberteil, G abgeschirmte Zuleitung.

Bei den Glasstäben bot sich überdies die Möglichkeit, die Resonanzen mit dem polarisationsoptischen Verfahren nach BERGMANN [6] zu beobachten. Eine Symmetriebetrachtung zeigt, daß dieses Verfahren in erster Näherung nur auf Azimutal-Radial-Resonanzen anspricht, Schwingungen mit $q \geq 1$ werden nur mit rasch abfallendem Kontrast angezeigt. Eine Darstellung des Spannungstensors mit der Bewegungskomponente aus Gl. (10) zeigt, daß sich dieser in einen reinen Kompressions- und einen allgemeinen Term zerlegen läßt. Dabei liefert ersterer keine Spannungsdoppelbrechung und der letztere entspricht einem ebenen Spannungszustand. Damit läßt sich der übliche Formalismus der ebenen Spannungsoptik [7] anwenden.

Bei der Betrachtung des schwingenden Glaszylinders im parallelen, linearpolarisierten Licht zwischen gekreuzten Polarisatoren bleiben folgende Gebiete dunkel:

- a) Deformationsfreie Gebiete, bei denen beide Hauptspannungen σ_1 und σ_2 verschwinden.

Tabelle II. y -Werte für den Zylinder.

| n | $p = 1$ | | $p = 2$ | | $p = 3$ | |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | $\sigma = 0,2$ | $\sigma = 0,4$ | $\sigma = 0,2$ | $\sigma = 0,4$ | $\sigma = 0,2$ | $\sigma = 0,4$ |
| L | 3,138 | 3,851 | 8,491 | 9,875 | 13,535 | 15,671 |
| 1 | 2,658 | 2,780 | 5,594 | 6,336 | 6,784 | 9,962 |
| 2 | 2,343 | 2,347 | 4,113 | 4,359 | 7,360 | 7,846 |
| 3 | 3,587 | 3,612 | 5,666 | 5,976 | 8,812 | 9,216 |
| 4 | 4,659 | 4,712 | 7,250 | 7,595 | 10,154 | 10,561 |
| 5 | 5,663 | 5,745 | 8,821 | 9,170 | 11,456 | 11,906 |
| T | 0 | 0 | 5,136 | 5,136 | 8,417 | 8,417 |

b) Das Feld der Isochromaten 0-ter Ordnung, auf denen also $\sigma_1 = \sigma_2$ ist. Isochromaten höherer Ordnungen werden im allgemeinen nicht sichtbar, da sie mit der Schwingungsfrequenz oszillieren.

c) Das Isoklinenfeld, d. h. Gebiete, in denen eine der beiden senkrecht aufeinanderstehenden Hauptspannungsrichtungen mit der Polarisationsrichtung zusammenfällt. Es läßt sich durch Anwendung zirkular polarisierten Lichtes ausschalten.

Da das dem ebenen Spannungszustand entsprechende Spannungsellipsoid im isotropen Material die gleichen Achsen wie das Verzerrungsellipsoid aufweist, genügt es, dieses für das Folgende zu betrachten. Es lautet in kartesischen Koordinaten

$$e_{rr}x^2 + 2e_{r\varphi}xy + e_{\varphi\varphi}y^2 = \text{const} \quad (13)$$

und seine Achsen liegen gegen das Koordinatensystem um einen Winkel α gedreht, der durch

$$\tan 2\alpha = \frac{2e_{r\varphi}}{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}} \quad (14)$$

gegeben wird. Dabei ist bekanntlich

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right),$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (15)$$

Mit Gl. (10) erhält man dann

$$\tan 2\alpha = R(r) \tan n\varphi \quad \text{mit} \quad R(r) = \frac{\frac{n}{r}U + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}}{\frac{\partial U}{\partial r} - n \frac{V}{r}}. \quad (16)$$

Nun lassen sich die Bestimmungsgleichungen für die Fälle a) bis c) aufstellen:

a) Hier ist

$$e_{rr} = e_{r\varphi} = e_{\varphi\varphi} = 0 \quad (17)$$

notwendig.

b) Wegen der Gleichheit beider Hauptspannungen entartet die Verzerrungsellipse Gl. (13) zum Kreis, dann ist

$$e_{rr} = e_{\varphi\varphi}, \quad e_{r\varphi} = 0. \quad (18)$$

c) Isoklinen treten auf, wenn zwischen dem Winkel β der Polarisationssebene des Lichts gegen $\varphi = 0$ und dem Winkel ψ einer Hauptspannungsrichtung gegen $\varphi = 0$, die Beziehung

$$\psi = \beta + m\pi/2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

besteht. Da nun $\psi = \varphi + \alpha$ ist, erhält man mit Gl. (16) die Bestimmungsgleichung der Isoklinen in Polarkoordinaten durch

$$2\varphi + m\pi = 2\beta - \arctan[R(r) \tan n\varphi]. \quad (20)$$

Mit den Gl. (17), (18), (20) läßt sich im Prinzip die Verteilung der Dunkelstellen für jede Resonanz $(n, p, 0)$ ausrechnen, und damit lassen sich die BERGMANNschen Bilder analysieren. Angesichts der mathematischen Schwierigkeiten sollen hier nur einige wesentliche Ergebnisse dargestellt werden:

1. Im zirkularpolarisierten Licht, also im Isochromatenbild, durchstoßen für den Index n , wegen der n -zahligen Symmetrie der Spannungsverteilung, genau n Isochromaten den Rand des Zylinderquerschnitts.

2. Die graphische Auswertung der Gl. (20) liefert für $n > 2$ genau $n - 2$ Durchstoßpunkte der Isoklinen durch den Rand.

Im Einklang hiermit stehen die Aufnahmen Bild 2, Nr. 19, und Bild 6, Nr. 10, bei BERGMANN [6], welche die gleiche Resonanz als Isoklinen- und Isochromatenbild zeigen. Die vier um 90 Grad versetzten, abgeschatteten Gebiete in der erstgenannten Aufnahme, sowie in verschiedenen anderen entstehen durch die Überlagerung des Isoklinen- und Isochromatenfeldes.

4. Experimentelle Ergebnisse

Mit den im letzten Abschnitt beschriebenen Methoden wurden Stäbe aus Aluminiumlegierungen und Glas untersucht, um einen möglichst großen Bereich der Querkontraktionszahl σ zu erfassen. Für möglichst gute Isotropie wurde durch Auswahl geeigneter Materialien gesorgt. (Sinteraluminium SAP 895 der Aluminium-Walzwerke Singen und BK 7-Glas von Leitz, Wetzlar.) Bei den Aluminiumstäben waren indessen keine wesentlichen Abweichungen gegenüber den von EDMONDS und SITTIG [3] vermessenen festzustellen, so daß deren Daten hier mitverwendet werden konnten. Für die Glasstäbe ergeben sich die Daten von Tabelle III.

Bei den Aluminiumstäben gelang es nicht, die Resonanzen $(1, 1, 0)$ einwandfrei aufzunehmen. Dies erklärt sich nach Bild 2 dadurch, daß für

Tabelle III. Abmessungen der Stäbe.

| Stab Nr. | Material | L | D | $f_{T,1,1}$ | $f_{L,0,1}$ | σ |
|-------------|-----------|------|------|-------------|-------------|----------|
| | | cm | cm | kHz | kHz | |
| 1 | Glas | 20,0 | 2,50 | 9,211 | 14,295 | 0,21 |
| 2 | Glas | 25,0 | 2,50 | 7,351 | 11,403 | 0,22 |
| 3 | Glas | 25,0 | 3,00 | 7,353 | 11,371 | 0,21 |
| 4 | Aluminium | 24,0 | 4,90 | 6,463 | 10,759 | 0,41 |
| 5 | SAP | 23,7 | 3,00 | 6,791 | 11,330 | 0,42 |

$\sigma=0,42$ die Amplitude für diesen Schwingungstyp auf dem Zylindermantel fast verschwindet. Die gerechneten Kurven für Zylinder und Scheibe mit den Meßwerten für obige Stäbe zeigt Bild 4. Es liegen also – abgesehen von den durch Ziehtextur geringfügig verfälschten Werten beim gezogenen Al-Zylinder ($\sigma=0,41$) – sämtliche Meßwerte in dem durch den Unterschied zwischen den theoretischen Werten für Scheibe und Zylinder definierten Fehlerstreifen. In einigen Fällen ist dieser schmäler, als der durch Meßfehler verursachte. Auch dann gibt es geringfügige Überschreitungen.

Die gemessene Fortsetzung der Serie $(n, 1, 0)$ bis $n=14$ in den Glasstäben zeigt Bild 5: Hier ist $\tilde{v}/v_T = y_n/n$ als Maß für die Phasengeschwindigkeit der um den Zylinder herumlaufenden Oberflächenwelle aufgetragen. Auch für höhere n -Werte liegen die Meßwerte noch gut auf der aus Gl. (7) berechneten, ausgezogenen Kurve. Dabei zieht sich die Zone, in der noch merkliche Aufhellung des Zylinderquerschnitts eintritt, mit wachsendem n mehr und mehr auf den Rand zurück. Die Aufnahmen 15 und 16 in Bild 4 der BERGMANNschen Arbeit [6] geben hierfür repräsentative Beispiele.

Die vorliegende Arbeit stellt folgende Ergebnisse sicher: Azimutal-Radialschwingungen treten im elastischen Schwingungsspektrum des isotropen

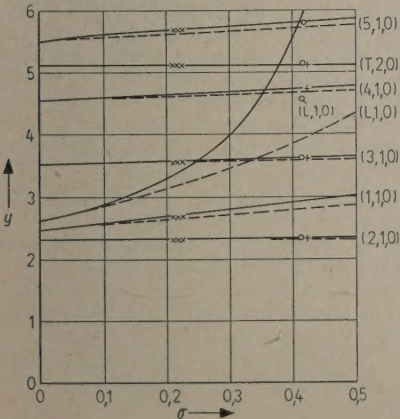


Bild 4. Die Funktion $y_{np}(\sigma)$ für den unendlich langen Zylinder (—) und die Scheibe (---) mit den gemessenen Resonanzen $(n, p, 0)$ der Stäbe Nr. 1 bis 3 (x), 4 (o) und 5 (+).

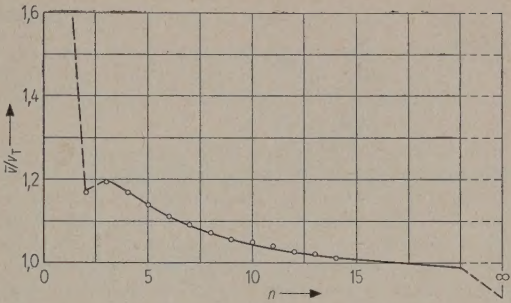


Bild 5. Die auf die Torsionswellengeschwindigkeit v_T bezogene Umfangsgeschwindigkeit der Azimutal-Radialwellen; Theorie (—), die Resonanzen $(n, 1, 0)$ des Stabes Nr. 1 (o).

Kreiszylinders nachweisbar auf. Sie lassen sich im Rahmen der Theorie des unendlich langen Zylinders klassifizieren und ihre Eigenfrequenzen berechnen. Die BERGMANNschen Schwingungsbilder werden im wesentlichen von dieser Klasse von Resonanzen erzeugt und können prinzipiell durch deren Theorie gedeutet werden.

Einer weiteren, allerdings mit wesentlich größerem Rechenaufwand verbundenen Untersuchung bliebe vorbehalten, im einzelnen berechnete polarisationsoptische Verteilungen der Dunkelstellen mit dem Experiment zu vergleichen. Die Untersuchung der Systematik dieser Schwingungen gewinnt für das Verständnis des gesamten Spektrums des isotropen Zylinders besondere Bedeutung, weil jede einzelne Azimutal-Radialresonanz eine Art „Bandenkopf“ für eine ganze Serie zugeordneter Resonanzen mit Axialkomponente darstellt. Deren Kenntnis wiederum ist gelegentlich bedeutsam bei der Verwendung der Zylinderresonatoren als elektromechanische Filterelemente, bei denen man durch Wahl der Abmessungen störende Nebenresonanzen aus dem interessierenden Frequenzintervall auszuschneiden trachtet.

Die Verfasser danken Herrn Prof. Dr. H. O. KNE-SER für die Förderung der vorliegenden Arbeit. Ferner gebührt Dank der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung sowie Herrn Prof. Dr. L. BERGMANN und den im Text genannten Firmen für die Überlassung der vermessenen Zylinder.

(Eingegangen am 17. September 1959.)

Schrifttum

- [1] POCHHAMMER, L., Crelles J. Math. **81** [1876], 324.
- [2] SITTIG, E., Acustica **7** [1957], 175.
- [3] EDMONDS, P. D. und SITTIG, E., Acustica **7** [1957], 299.
- [4] VIKTOROV, I. A., Sov. Phys. Acoustics **4** [1958], 131.
- [5] LORD RAYLEIGH, Proc. Math. Soc. (London) **17** [1885], 4.
- [6] BERGMANN, L., Z. Phys. **125** [1949], 405.
- [7] FÖPPL, L. und MÖNCH, E., Praktische Spannungsoptik. Springer-Verlag, Berlin 1950.

Buchbesprechung

P. H. PARKIN and H. R. HUMPHREYS, *Acoustics noise and buildings*. Faber and Faber Ltd., London 1958, 330 Seiten, 117 Bilder, 16 cm × 25 cm, Ganzleinen sh 70/—.

Die akustischen Aufgaben im Bauwesen sind so vielseitig, daß sie nicht alle von den wenigen Spezialisten bearbeitet werden können, sondern daß ihre Lösung nur dann zur Selbstverständlichkeit wird, wenn die Architekten selbst die wichtigsten Regeln kennen. Es ist daher immer wieder dankenswert, wenn Bücher zu ihrer Unter- richtung geschrieben werden, und es ist besonders glücklich, wenn sich dazu ein die Reichweite der Gesetzmäßig- keiten überblickender Wissenschaftler wie P. H. PARKIN und ein die Anwendungsmöglichkeiten beherrschender Architekt wie H. R. HUMPHREYS zusammenfinden.

Vor etwa 25 Jahren hatten ALEXANDER WOOD und HOPE BAGENAL ein ähnliches Gemeinschaftswerk herausge- geben, das lange Zeit ein Standardwerk der britischen Literatur sein sollte. Das vorliegende Buch, von HOPE BAGENAL selbst mit einem Vorwort ausgezeichnet, darf sich in Ziel und Art als der legitime Nachfolger des „Planning for good acoustics“ ansehen, und es ist ihm die gleiche Anerkennung und Verbreitung zu wünschen.

Hätten jedoch die Verfasser das inzwischen angewach- sene Material in gleicher Gründlichkeit zu behandeln gesucht, so wäre ein mehrbändiges Werk entstanden, das den Architekten den Mut genommen hätte, sich über- haupt mit der Materie zu befassen. Den Verfassern ist es vielmehr gelungen, auf 330 Seiten und mit 117 einprägsamen Zeichnungen und Diagrammen von Frau HUMPHREYS Hand eine Einführung zu geben, in der die wesentlichsten Dinge in logischer Folge, einfach und doch immer Interesse weckend behandelt sind.

Sie verzichten dabei bewußt auf jegliche Deduktion der zu beobachtenden Regeln aus allgemeinen physikali- schen Gesetzen und erst recht auf mathematische Ablei- tungen. (Das ist nur insofern bedauerlich, als sie bei den nun einmal notwendigen Formeln wie auch sonst im Text keine Literaturhinweise geben, an Hand derer der Leser der Herkunft und somit der Tragweite einer Formel nachgehen könnte.)

Das erste Kapitel gibt eine Übersicht über die „Natur des Schalles“ einschließlich seiner subjektiven Bewer- tung. (Die Einführung der dB-Skala als näherungs- weise dem subjektiven Empfinden entsprechend und der sone-Skala als einer „anderen Einheit“ legt der ersten zu viel, der zweiten zu wenig Wert bei.)

Das zweite Kapitel befaßt sich mit dem „Verhalten des Schalles in Räumen“. (Hier sei die Bitte gestattet, für physikalische Größen keine Doppelbuchstaben zu verwenden. Die Nachhallzeit wird in der internationalen Literatur mit T bezeichnet. Will man „the reverberation time“ besonders zum Ausdruck bringen, dann möge man T_R aber nicht R.T. schreiben.)

Es folgen drei Kapitel, die speziellen raumakustischen Anwendungen gewidmet sind, nämlich dem „Entwurf von Sprachräumen“, dem „Entwurf von Muskräumen“ und — im Hinblick auf die zusätzlichen Einrichtungen gesondert — dem „Entwurf von Studios“. In diesen Kapiteln finden viele von den persönlichen Erfahrungen der Verfasser ihren Niederschlag, die sie an Hand der vielen von ihnen beratenen Räume, insbesondere der berühmten Royal Festival Hall, gewonnen haben. Hier finden sich auch für die Fachkollegen manche interessan- ten Hinweise, so z. B. die Betrachtungen über Musik-

podien auf Seite 92 ff. Bei den Kirchen wird die von BAGENAL und WOOD vertretene Behauptung wiederholt, daß sie (trotz der großen Zahl der Eigentöne im Sprach- frequenzbereich!) eine „sympathetic note“ aufweisen können. „Nothing is known about the reason for this.“

Die Raumakustik findet ihren Abschluß in einem Kapitel über „Sprachverstärkungsanlagen“, wobei be- sonders darauf hingewiesen wird, daß der Lautsprecher- schall später beim Zuhörer eintreffen soll als der vom Redner kommende, damit dieser als Schallquelle wirkt, ein Gebiet, auf dem ebenfalls die Verfasser besonders erfolgreich gearbeitet haben.

Die folgenden vier Kapitel sind der Bauakustik ge- widmet. Sie nehmen mit Recht mehr Raum ein als die Kapitel über Raumakustik, denn Kenntnis der Schall- isolationsgesetze verlangt nahezu jeder Bau, während nur wenige Architekten dazu kommen, Opern- oder Konzerthäuser zu bauen, und dabei immer noch die Zu- ziehung eines Spezialisten lohnt.

Das siebente Kapitel bringt zunächst die allgemeinen Prinzipien, wobei auch das aktuelle Problem der Neben- wege gewürdigt ist. (Die Vorteile biegeweicher Schalen hätten hier wohl eine stärkere Betonung verdient.)

Das achte Kapitel behandelt die praktische Anwen- dung, ein Gebiet, für das gerade P. H. PARKIN als lang- jähriger Referent der Building Research Station reiche Erfahrungen mitbringt. Der Baufachmann wird beson- ders die Listen empfehlenswerter Baukonstruktionen begrüßen. (Der Referent ist allerdings erstaunt, dar- unter Doppelwände aus nur 5 cm dicken Klinker-Beton- schalen (Coinzidenz-Grenzfrequenz 300 Hz ?) in 2,5 cm Abstand zu finden.)

Aber auch das neunte Kapitel „Schall-Messung und -Vorausberechnung“ sollte der Architekt eines näheren Studiums würdigen, denn wer Meßwerte beurteilen soll, muß ungefähr wissen, wie sie gewonnen sind; und das- selbe gilt in noch höherem Maße von dem letzten Ka- pitel, welches für den Bewohner der Häuser und Städte das Wichtigste behandelt, „die Kriterien für Lärm- abwehr und Schallschutz“, die freilich zugleich auch das Angreifbarste darstellen. Die Verfasser kamen in ihrem anerkennenswerten Bestreben um eine möglichst voll- ständige Übersicht auf immerhin 12 verschiedene Grenz- kurven-Scharen für die Beurteilung von Pegel-Oktav- Spektren, die zum Teil keine Überschreitung, zum Teil mittlere Überschreitungen von 1 oder auch 2 dB zulassen. Welche verwirrende Fülle für den Architekten! Und wie gering ist die Aussicht auf eine baldige Einig- ung oder Vereinfachung!

Aber noch mehr möchte man an dem Erfolg aller Standardisierungsbestrebungen zweifeln, wenn man auch bei diesem international interessierenden Buche feststel- len muß, daß es unter den 7 Tabellen, die es beschlie- ßen und die zunächst eine Übersicht geben über Absorp- tionsgrade, Gewichte, Schalldämm-Maße, Geräusch-Spek- tren sowie Umrechnungen von Druckverhältnissen in dB-Differenzen und eine Reihe dekadische Logarithmen, die letzte der Umrechnung von Feet in Meter, von Inches of Water in kg/m^2 usw. gewidmet werden mußte, weil das ganze Buch auf diesen traditionellen britischen Maßen aufgebaut ist.

Gewiß, es gibt schlimmere Trennungslinien auf unse- rem Erdball, aber die feet-m-Grenze sollte wenigstens fallen können (natürlich zugunsten der kg und m!).

L. CREMER